LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Mathématiques

Analyse
PSI

Cours

Méthodes

Exercices résolus

D. GUININ • B. JOPPIN

Bréal
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Nouveau programme

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Analyse

PSI

Daniel GUININ

Professeur en classes préparatoires scientifiques - 2e année

Bernard JOPPIN

Professeur en classes préparatoires scientifiques - 1re année

Bréal éditions

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Titres disponibles dans la filière PSI

Mathématiques 2e année

- Analyse PSI
- Algèbre et géométrie PSI

Physique 2e année

- Mécanique des fluides PC - PSI
- Électromagnétisme PC - PSI
- Physique des ondes PC - PSI
- Électrotechnique PSI
- Électronique PSI
- Optique MP - PC - PSI - PT
- Thermodynamique PC - PSI

Chimie 2e année

- Chimie PSI

Exercices 2e année

- Mathématiques PC - PSI
- Physique PSI

Maquette : Insolencre & 16 iS.
Couverture : Sophie Martinet.
Réalisation : 16 iS.

ISBN 2 7495 0394 9

Avant-propos

Cet ouvrage est conforme aux **nouveaux programmes** mis en place à compter de la rentrée 2004.

Il est à noter que les programmes de PSI et PSI* sont identiques.

Les Nouveaux Précis Bréal sont le reflet d'une évolution des habitudes de travail des étudiants en prépas scientifiques PSI ou PSI*.

Rigueur, méthode et clarté sont sans doute les leitmotivs de cette évolution. La mise en page et l'apport de couleur accompagnent, en la soulignant, la structure du contenu, divisé en trois parties complémentaires :

- Le **Cours** est composé des définitions, théorèmes et propriétés nécessaires et suffisants. L'objectif est clair : tout le programme, rien que le programme. Tous les théorèmes, ainsi que les principales propriétés, sont démontrés en détail. Parfois, une démonstration simple à établir pourra faire l'objet d'un premier exercice d'application stimulant.

- Les **Méthodes** constituent un point important des Nouveaux Précis. Étudiants et professeurs savent combien le plus délicat, lorsque l'on aborde un problème, est souvent la phase de démarrage : *par quel bout le prendre ?* Deux temps composent cette nouvelle rubrique.

  L'essentiel explicite, en une fiche de synthèse, les démarches les plus courantes. Des mises en œuvre illustrent ces démarches par des exercices classiques, voire «incontournables».

- Les **Exercices**, toujours aussi nombreux que dans les éditions précédentes, sont classés selon leur degré de difficulté : du niveau 1, qui correspond à des exercices souvent proches du cours, au niveau 3, moins «transparents». Le niveau 2 propose des sujets de colles raisonnables.

  Dans tous les cas, ces exercices sont calibrés en fonction de ce que l'on peut véritablement attendre d'un étudiant en vue de la préparation immédiate des concours.

  Les indications apportent un coup de pouce qui peut être bienvenu lorsque l'on travaillle seul.

  Tous les exercices ont une solution, détaillée ou plus succincte.

Il nous a paru indispensable d'accorder à ces deux dernières parties, les Méthodes et les Exercices, une place importante, équivalente à celle du Cours, au fil des onze chapitres que comporte ce tome consacré à l'analyse. Cet équilibre permettra aux étudiants de PSI ou PSI* de disposer d'un outil de travail complet, adapté au rythme progressif et soutenu de la préparation aux concours.

Les auteurs

Sommaire

Sommaire

6. Intégration sur un intervalle quelconque

7. Séries de Fourier

8. Équations différentielles

9. Fonctions de plusieurs variables réelles
Calcul différentiel

10. Courbes et surfaces

11. Fonctions de plusieurs variables – Calcul intégral

CHAPITRE
1
Espaces vectoriels normés

A. Normes et distances

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou le corps des complexes.
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Normes et distances

Définition 1

On appelle **norme** [1] sur E une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tous vecteurs x, y de E et tout scalaire λ de $\mathbb{K}$:

(1) $N(x) = 0 \iff x = 0_E$,

(2) $N(\lambda x) = |\lambda| \; N(x)$,

(3) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Le couple (E, N) est appelé un **espace vectoriel normé.** [2]

Une norme est souvent notée : $\|\cdot\| \; : \; x \mapsto \|x\|$.

[1] Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la norme usuelle est la valeur absolue.

[2] L'abréviation e-v-n est courante.

Remarque

D'après (1) une norme vérifie : **(4)** $\forall x \in E, \; x \neq 0_E \;\Rightarrow\; N(x) > 0$.

Réciproquement, si une application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifie les axiomes **(2)** et **(4)**, en donnant dans **(2)** la valeur 0 à λ, on obtient $N(0_E) = 0$ donc N vérifie **(1)**.

En conséquence, une norme peut aussi être définie comme une application $N \; : \; E \to \mathbb{R}$ vérifiant les axiomes **(2)**, **(3)** et **(4)**.

Définition 2

Distance associée à une norme

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, l'application d définie par :

$$d \; : \; E^2 \to \mathbb{R}_+, \quad (x, y) \mapsto d(x, y) = N(x - y)$$

est appelée la **distance** associée à la norme N.

Définition 3

Norme et distance induites

Soit (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

La restriction N_F de N à F est une norme, appelée **norme** sur F **induite** par N.

La restriction à F^2 de la distance associée à N est la distance d_F associée à N_F. [3]

[3] N_F et d_F sont encore usuellement notées N et d.

On considère désormais un espace vectoriel normé (E, N).

Définition 4

Boules et sphères [4]

a) La **boule ouverte** de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ est :

$$B_o(a, r) = \{x \in E / N(a - x) < r\}.$$

b) La **boule fermée** de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ est :

$$B_f(a, r) = \{x \in E / N(a - x) \leq r\}.$$

c) La **sphère** de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ est :

$$S(a, r) = \{x \in E / N(a - x) = r\}.$$

[4] Les boule ou sphère de centre 0_E et de rayon 1 sont appelées boule unité, sphère unité de E.

Définition 5

Une partie A non vide de E est dite **bornée** s'il existe une boule fermée de E contenant A.

Définition 6

Soit A une partie non vide et bornée de E. On appelle **diamètre** de A le réel :

$$\delta(A) = \sup\{N(x-y)/(x,y) \in A^2\}.$$

Définition 7

La **distance d'un point** x de E **à une partie** non vide A de E est le réel :

$$d(x,A) = \inf\{N(x-y)/y \in A\}.$$

La **distance de deux parties** non vides A et B est le réel :

$$d(A,B) = \inf\{N(x-y)/x \in A, y \in B\}.$$

Définition 8

Soit A un ensemble non vide, une **application** $f : A \to E$ est dite **bornée** si son image $f(A)$ est une partie bornée de E, donc s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in A,\ N(f(x)) \leqslant M.$ [5]

[5] **Remarque.** L'ensemble $\mathfrak{B}(A,E)$ des fonctions bornées de A dans E est un sous-espace vectoriel de E^A ; il est normé par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} N(f(x))$. Si $A = \mathbb{N}$, il s'agit de l'espace des suites bornées de E.

Définition 9

Normes équivalentes

On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si les fonctions $\dfrac{N_1}{N_2}$ et $\dfrac{N_2}{N_1}$ définies sur $E \setminus \{0_E\}$ sont majorées.

Remarques

1) Cette définition peut se traduire par l'existence de deux réels α et β strictement positifs tels que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$.
2) On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de l'espace E.
   En effet, on vérifie que c'est une relation :
   - réflexive : pour toute norme N, $1 \cdot N \leqslant N \leqslant 1 \cdot N$
   - symétrique : $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$ donne $\dfrac{1}{\beta} N_2 \leqslant N_1 \leqslant \dfrac{1}{\alpha} N_2$
   - transitive : $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$ et $\alpha' N_2 \leqslant N_3 \leqslant \beta' N_2$ donnent :
   $$\alpha\alpha' N_1 \leqslant N_3 \leqslant \beta\beta' N_1.$$

Exemple 1

Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

On note $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

a) Montrer que l'on définit trois normes sur $\mathbb{K}^n$ par les expressions suivantes :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad , \quad N_2(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad N_\infty(x) = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

b) Dans le cas $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, représenter les boules unités fermées B_1, B_2 et B_∞ associées à ces normes.

c) Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont deux à deux équivalentes.

a) N_2 est la norme préhilbertienne canonique de $\mathbb{K}^n$ attachée au produit scalaire :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}\, y_i \text{ [6]}$$

[6] Voir Algèbre – Géométrie, chap. 5

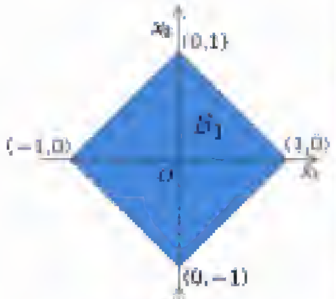
Vérifions que N_1 et N_∞ satisfont les axiomes de définition (2), (3) et (4) des normes.

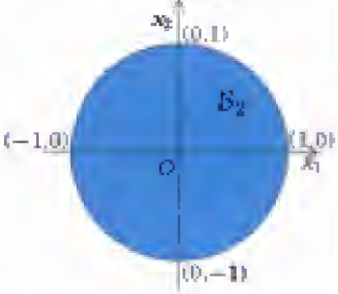
Ce sont clairement des applications à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

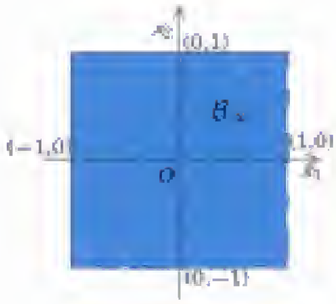
Pour tout x de $\mathbb{K}^n$, on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|x_i| \leqslant N_1(x)$ et $|x_i| \leqslant N_\infty(x)$ donc si x est non nul, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_i| > 0$ et on a $N_1(x) > 0$ et $N_\infty(x) > 0$: l'axiome (4) est vérifié.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ d'où :

$$N_1(\lambda x) = |\lambda|\, N_1(x) \ , \ N_\infty(\lambda x) = |\lambda|\, N_\infty(x) \ : \text{(2) est vérifié.}$$







Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on a $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ donc :

$$N_1(x+y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = N_1(x) + N_1(y)$$

et N_1 vérifie (3) ;

pour N_∞, remarquons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant N_\infty(x) + N_\infty(y)$$

il en résulte $N_\infty(x+y) \leqslant N_\infty(x) + N_\infty(y)$ et N_∞ vérifie (3).

b) $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- $B_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x_1| + |x_2| \leqslant 1\}$

On distingue quatre cas :

si $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$: $(x_1, x_2) \in B_1 \iff x_1 + x_2 \leqslant 1$

si $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$: $(x_1, x_2) \in B_1 \iff x_1 - x_2 \leqslant 1$

si $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$: $(x_1, x_2) \in B_1 \iff -x_1 + x_2 \leqslant 1$

si $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$: $(x_1, x_2) \in B_1 \iff -x_1 - x_2 \leqslant 1$

Tous les cas peuvent se ramener au premier par des symétries.

- $B_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$

C'est le disque usuel de $\mathbb{R}^2$ de centre O et de rayon 1.

- $B_\infty = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x_1| \leqslant 1 \ , \ |x_2| \leqslant 1\}$. Il s'agit du pavé : $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ |x_i| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{et} \quad |x_i| \leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

d'où $N_\infty(x) \leqslant N_1(x)$ et $N_1(x) \leqslant n\, N_\infty(x)$; les normes N_1 et N_∞ sont donc équivalentes. On a aussi de manière évidente :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leqslant n\, N_\infty(x)^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geqslant N_\infty(x)^2$$

donc $N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{n} N_\infty(x)$; les normes N_2 et N_∞ sont donc équivalentes.

Par transitivité, on en déduit l'équivalence de N_1 et N_2 avec de plus : $\dfrac{1}{n} N_1 \leqslant N_2$ et, comme l'inégalité $N_2^2 \leqslant N_1^2$ est évidente, il vient : $\dfrac{1}{n} N_1 \leqslant N_2 \leqslant \sqrt{n} N_1$.

Exemple 2 Normes usuelles sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes

a) Montrer que l'on définit trois normes sur $\mathbb{K}[X]$ en posant pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \quad , \quad N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad N_\infty(P) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i| .$$

b) Ces normes sont-elles équivalentes ?

Remarque
En associant à un polynôme P sa fonction polynôme, on définit de nouvelles normes sur $\mathbb{K}[X]$ par les expressions suivantes :
$\sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$
$\sup_{|z|=1} |P(z)|$
$\int_0^1 |P(t)| \mathrm{d}t$.

a) Les vérifications sont identiques à celles de l'exemple précédent.
N_2 est la norme préhilbertienne canonique de $\mathbb{K}[X]$.

b) Comme dans l'exemple 1 précédent, on montre que ces normes sont comparables en un sens : $N_\infty \leqslant N_2 \leqslant N_1$.

Elles ne le sont pas dans l'autre sens : on montre que les fonctions $\dfrac{N_2}{N_\infty}$ et $\dfrac{N_1}{N_2}$ ne sont pas majorées en considérant la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$$

$$N_1(P_n) = n + 1 \quad , \quad N_2(P_n) = \sqrt{n+1} \quad , \quad N_\infty(P_n) = 1$$

$$\frac{N_2}{N_\infty}(P_n) = \frac{N_1}{N_2}(P_n) = \sqrt{n+1} \quad , \quad \frac{N_1}{N_\infty}(P_n) = n + 1.$$

Deux quelconques des normes N_1, N_2, N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exemple 3 Normes classiques sur l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{K}$

a) Montrer que l'on définit sur cet espace trois normes par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \quad , \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

b) Ces normes sont-elles équivalentes ?

a) $\|\cdot\|_2$ est la norme préhilbertienne, attachée au produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$:

$$(f,g)\mapsto \langle f \mid g\rangle = \int_0^1 \bar{f}(t)\,g(t)\mathrm{d}t \ ✎^{(7)}$$

✎[7] Cf. Algèbre – Géométrie, chapitre 5.

Vérifions que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ satisfont les axiomes de définition **(2)**, **(3)** et **(4)** des normes.

Ce sont clairement des applications à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Une propriété usuelle de l'intégrale ✎[8] est que si f est continue sur $[a,b]$, $(a<b)$, positive et non identiquement nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f>0$;

✎[8] Cf. chapitre 4.

donc $\|\cdot\|_1$ vérifie l'axiome **(4)**.

Si f est non nulle, il existe $x_0\in[0,1]$ tel que $|f(x_0)|>0$ alors $\|f\|_\infty \geqslant |f(x_0)|$ donne :

$$\|f\|_\infty > 0 \ : \ \|\cdot\|_\infty \text{ vérifie l'axiome } \mathbf{(4)}.$$

Les autres vérifications sont simples :

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_1 &= \int_0^1 |\lambda f(t)|\,dt = |\lambda|\int_0^1 |f(t)|\,dt = |\lambda|\,\|f\|_1\\
\|\lambda f\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = |\lambda|\,\|f\|_\infty \ ✎^{(9)}\\
\|f+g\|_1 &= \int_0^1 |f(t)+g(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 \big(|f(t)|+|g(t)|\big)\,dt = \|f\|_1+\|g\|_1\,.
\end{aligned}$$

✎[9] La propriété est évidente pour $\lambda=0$. On suppose $\lambda\neq 0$, alors $\forall t\in[0,1], |\lambda f(t)|\leqslant|\lambda|\,\|f\|_\infty$ donc $\|\lambda f\|_\infty\leqslant|\lambda|\,\|f\|_\infty$. Ce même résultat appliqué avec $f=\frac{1}{\lambda}\lambda f$ donne $\|f\|_\infty\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$ soit $|\lambda|\,\|f\|_\infty\leqslant\|\lambda f\|_\infty$, d'où la conclusion.

Pour tout $t\in[0,1]$, $|f(t)+g(t)|\leqslant|f(t)|+|g(t)|\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$

d'où $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.

b) Ces normes sont comparables dans un sens :

$$\|f\|_1\leqslant\|f\|_2\leqslant\|f\|_\infty \quad \text{(égalité pour les fonctions constantes)}$$

$\|f\|_1\leqslant\|f\|_2$ résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ✎[10]

✎[10] Cf. Algèbre – Géométrie, chapitre 5.

$\|f\|_2\leqslant\|f\|_\infty$ est conséquence évidente de $\forall t\in[0,1],\ |f(t)|\leqslant\|f\|_\infty$.

Elles ne le sont pas dans l'autre sens : on montre que les fonctions

$$f\mapsto\frac{\|f\|_2}{\|f\|_1} \quad \text{et} \quad \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}$$

ne sont pas majorées en considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t)=t^n$.

Le calcul donne $\quad \|f_n\|_1=\dfrac{1}{n+1} \quad , \quad \|f_n\|_2=\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad , \quad \|f_n\|_\infty=1.$

et les suites :

$$n\mapsto\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1}=\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \ , \ n\mapsto\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2}=\sqrt{2n+1} \ \text{ et } \ n\mapsto\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}=n+1$$

ne sont pas majorées.

Définition 10

Avec les notations de l'exemple précédent,

$\|\cdot\|_1$ est appelée **norme de la convergence en moyenne**,

$\|\cdot\|_2$ est appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique**,

$\|\cdot\|_\infty$ est appelée **norme de la convergence uniforme**.

Propriété 1

Seconde inégalité triangulaire

Soit (E, N) un e-v-n. Pour tout x et y de E :

$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y).$$

$x = x - y + y$ donne $N(x) \leqslant N(x-y) + N(y)$ donc $N(x) - N(y) \leqslant N(x-y)$.
Symétriquement, en échangeant x et y : $N(y) - N(x) \leqslant N(x-y) = N(x-y)$.

Propriété 2

Produit d'espaces vectoriels normés

Soit (E, N) et (E', N') deux e-v-n.

On définit trois normes classiques sur l'espace produit $E \times E'$:

$$\|(x, x')\|_1 = N(x) + N'(x') \quad , \quad \|(x, x')\|_2 = \left(N^2(x) + N'^2(x')\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|(x, x')\|_\infty = \sup\left(N(x), N'(x')\right) \text{ ✎}^{(11)}$$

Ces trois normes sont deux à deux équivalentes.

✎ (11) **Remarques.**
- On définit de façon analogue (par récurrence) des normes équivalentes sur un produit de plusieurs espaces vectoriels normés, en particulier sur E^n.
- Par défaut, tout produit d'espaces vectoriels normés sera supposé muni de l'une de ces normes.

Aucune difficulté hormis l'inégalité triangulaire de la norme $\|\cdot\|_2$.
En utilisant les inégalités triangulaires de N et de N' :

$$N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \quad \text{et} \quad N'(x'+y') \leqslant N'(x') + N'(y')$$

et l'inégalité triangulaire de $(\mathbb{R}^2, N_2)$, on obtient : ✎ (12)

$$\sqrt{N^2(x+y) + N'^2(x'+y')} \leqslant \sqrt{N^2(x) + N'^2(x')} + \sqrt{N^2(y) + N'^2(y')}.$$

L'équivalence de ces normes tient aux inégalités suivantes :

$$\|(x, x')\|_\infty \leqslant \|(x, x')\|_2 \leqslant \|(x, x')\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|(x, x')\|_2 \leqslant 2\|(x, x')\|_\infty.$$

✎ (12) $\sqrt{(a+b)^2+(a'+b')^2} \leqslant \sqrt{a^2+a'^2}+\sqrt{b^2+b'^2}$.

2. Topologie d'un e-v-n E

Définition 11

Ouvert – Fermé

a) On appelle **ouvert de** E toute partie X de E vide ou vérifiant la propriété :

$$\forall x \in X, \ \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \ B_o(x, r) \subset X.$$

b) On appelle **fermé de** E toute partie de E dont le complémentaire dans E est un ouvert de E :

$$X \text{ fermé de } E \iff E \setminus X \text{ ouvert de } E.$$

Définition 12

Point intérieur

Étant donné une partie non vide A de E, un point $a \in E$ est dit **intérieur** à A s'il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **l'intérieur** de A et noté $\mathring{A}$. ✎ (13)

✎ (13) **Remarque.**
L'étude systématique des notions d'intérieur et d'adhérence d'une partie est hors programme.
Nous ne dépasserons pas le stade des définitions.

Exemples

Dans $\mathbb{R}$:

soit $A = [1, 2[$, alors $\mathring{A} =]1, 2[$

soit $B = \{1, 2\}$, alors $\mathring{A} = \varnothing$

soit $C = \{0\} \cup]1, 2]$, alors $\mathring{A} =]1, 2[$.

Définition 13

Point adhérent à une partie

Étant donné une partie non vide A de E, un point $a \in E$ est dit **adhérent** à A si,

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad r > 0 \quad \Rightarrow \quad B_o(a, r) \cap A \neq \varnothing$$

L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'**adhérence** de A et noté $\overline{A}$.

Exemple

- Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure M.
  $M = \sup A$ est l'unique majorant de A adhérent à A.

  En effet, si M est un majorant de A, on a $M = \sup A$ si et seulement si :

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad]M - \varepsilon, M] \cap A \neq \varnothing$$

  donc si et seulement si $M \in \overline{A}$.

- De même, pour une partie A de $\mathbb{R}$, non vide et minorée, $m = \inf A$ est l'unique minorant de A adhérent à A.

Définition 14

Point frontière

Étant donné une partie A non vide de E, un point $a \in E$ est dit **point frontière** de A s'il est adhérent mais n'est pas intérieur à A.

Définition 15

Partie dense

On dit qu'une partie A de E est dense dans E si l'adhérence de A est E : $\overline{A} = E$.

On dit qu'une partie B de A est dense dans A si $A \subset \overline{B}$.

Définition 16

Point d'accumulation ✎(14)

On appelle point d'accumulation d'une partie A de E tout point x de E adhérent à $A \setminus \{x\}$.

✎(14) Définition donnée à titre d'information ; la notion est hors programme.

Un tel point est caractérisé par le fait que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $B_o(x, r) \cap A \setminus \{x\}$ n'est pas vide ou encore que $B_o(x, r) \cap A$ est infini.

Définition 17

Point isolé

On appelle point isolé d'une partie A de E tout point a de A pour lequel il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A \cap B_o(a, r)$ soit réduit à $\{a\}$:

$$a \text{ point isolé de } A \iff \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \quad A \cap B_o(a, r) = \{a\}.$$

Dans ce qui suit,

E est un espace vectoriel normé.

Propriété 3

Ouverts et fermés

a) E et $\varnothing$ sont, à la fois, ouverts et fermés de E.

b)
- La réunion d'une famille quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.
- L'intersection d'une famille quelconque de fermés de E est un fermé de E.

c)
- L'intersection de deux parties ouvertes de E est un ouvert de E.
- La réunion de deux parties fermées de E est un fermé de E.

a) Par définition.

b) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille famille d'ouverts de E et $U = \bigcup_{i\in I} U_i$.

Pour tout x de U, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$.

U_{i_0} étant ouvert, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_o(x, r) \subset U_{i_0}$, donc $B_o(x, r) \subset U$.

Ainsi U est ouvert.

Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E et $V = \bigcap_{i\in I} V_i$.

En posant $U_i = E \setminus V_i$, on a $V_i = E \setminus U_i$ et :

$$V = \bigcap_{i\in I}(E \setminus U_i) = E \setminus \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Les U_i étant ouverts, $\bigcup_{i\in I} U_i$ est ouvert et V est fermé.

c) Soit U_1 et U_2 deux ouverts de E.

Si $U_1 \cap U_2$ est non vide, pour tout $x \in U_1 \cap U_2$, il existe $r_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$B_o(x, r_1) \subset U_1 \quad \text{et} \quad B_o(x, r_2) \subset U_2$$

donc en posant $r = \min(r_1, r_2)$, on a $r \in \mathbb{R}_+^*$ et :

$$B_o(x, r) \subset U_1 \cap U_2.$$

Ainsi $U_1 \cap U_2$ est ouvert.

La propriété reste vraie si $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Si V_1 et V_2 sont deux fermés, en posant $U_1 = E \setminus V_1$ et $U_2 = E \setminus V_2$, U_1 et U_2 sont des ouverts et il vient :

$$V_1 \cup V_2 = (E \setminus U_1) \cup (E \setminus U_2) = E \setminus (U_1 \cap U_2).$$

Donc $V_1 \cup V_2$ est fermé car $U_1 \cap U_2$ est ouvert.

Remarque

La propriété c) s'étend par récurrence aux familles **finies** mais elle est fausse pour les familles quelconques.

Exemples dans $\mathbb{R}$:

- $U_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'ouverts,

et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n = \{0\}$ n'est pas un ouvert.

- $V_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de fermés,

et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} V_n =]0, 1[$ n'est pas un fermé.

Exemple 4 Relation entre normes et ouverts

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 telles que $N_1 \leq \alpha N_2$, $\alpha > 0$.

Notons $B_i(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r définie par la norme N_i.(15)

(15) Pour $i \in \{1, 2\}$.

Ces boules vérifient $B_2(a, r) \subset B_1(a, \alpha r)$, $\left(N_1(a, x) \leq \alpha N_2(a, x) < \alpha r\right)$.

Donc si U est un ouvert de (E, N_1), alors U est aussi un ouvert de (E, N_2).

En effet, x étant un point de U, il existe un réel $r > 0$ tel que $B_1(x, r) \subset U$ et l'inclusion $B_2\left(x, \frac{r}{\alpha}\right) \subset B_1(x, r)$ donne $B_2\left(x, \frac{r}{\alpha}\right) \subset U$.

En conséquence, si ces deux normes sont équivalentes, les espaces vectoriels normés (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes ouverts.

Exemple 5 L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon.

C'est-à-dire que $\overline{B_o(a, r)} = B_f(a, r)$.

Il suffit de vérifier que tout point x de la sphère $\mathcal{S}(a, r)$ est adhérent à la boule ouverte $B_o(a, r)$.

Notons $y = a + \mu(x - a)$ l'image de x par l'homothétie de centre a et de rapport $\mu \in]0, 1[$.

Calculons les deux normes :

$$\| y - a \| = \mu \| x - a \| = \mu r \quad \text{et} \quad \| y - x \| = \| (1 - \mu)(a - x) \| = (1 - \mu) r.$$

Pour tout $\alpha \in]0, r[$ avec $1 - \dfrac{\alpha}{r} < \mu < 1$, on a $\mu r < r$ et $(1 - \mu) r < \alpha$, et donc :

$$y \in B_o(a, r) \cap B_o(x, \alpha) \text{ et } B_o(a, r) \cap B_o(x, \alpha) \neq \emptyset.$$

Exemple 6 Adhérence d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace de E, espace vectoriel normé.

a) Montrer que son adhérence $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) En déduire qu'un hyperplan est soit fermé soit dense dans E.

a) Il s'agit de vérifier que, si x et y sont dans $\overline{F}$ et λ dans $\mathbb{K}$, alors $x + y \in \overline{F}$ et $\lambda x \in \overline{F}$.

La définition des points adhérents à F indique, pour tout $r > 0$, l'existence de points a et b de F tels que $\| x - a \| < r$ et $\| y - b \| < r$.

Alors les majorations :

$$\| (x + y) - (a + b) \| \leqslant \| x - a \| + \| y - b \| < 2r$$
$$\| \lambda x - \lambda a \| = |\lambda| \, \| x - a \| \leqslant |\lambda| \, r$$

suffisent à prouver que $x + y$ et λx sont adhérents à F. [16]

[16] Car $a+b$ et λa appartiennent à F.

b) Supposons maintenant que F soit un hyperplan non fermé de E.

Alors il existe c dans $\overline{F} \setminus F$ et la droite $\mathbb{K}c$ est un supplémentaire de F. [17]

[17] Voir en Algèbre–Géométrie, la caractérisation des hyperplans.

Contenant $\mathbb{K}c$ et F, le sous-espace vectoriel $\overline{F}$ contient $\mathbb{K}c \oplus F$, c'est-à-dire que $E \subset \overline{F}$.

Ainsi $\overline{F} = E$: F est dense dans E.

Exemple 7 Distance à une partie

Soit A une partie non vide de E, espace vectoriel normé. Montrer que :

a) $\overline{A} = \{x \in E / d(x, A) = 0\}$.

b) $\forall x, y \in E, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant \| x - y \|$.

a) L'égalité $d(x, A) = 0$ se traduit par $\forall r > 0, \exists a \in A, \| x - a \| < r$.

Ceci caractérise $x \in \overline{A}$.

b) Fixons deux points x et y de E. Alors pour tout point z de A :

$\| x - z \| - \| y - z \| \leqslant \| x - y \|$	(seconde inégalité triangulaire)
$d(x, A) - \| y - z \| \leqslant \| x - y \|$	(une borne inférieure est un minorant)
$d(x, A) - d(y, A) \leqslant \| x - y \|$	(elle est le plus petit des minorants)
$d(y, A) - d(x, A) \leqslant \| y - x \| = \| x - y \|$	(échange de x et y)
$\|d(x, A) - d(y, A)\| \leqslant \| x - y \|$	$(\pm \lambda \leqslant \mu \;\Rightarrow\; \|\lambda\| \leqslant \mu)$

3. Suites d'un e-v-n E

La notion de suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ a été étudiée en Analyse – PCSI ou MPSI.

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on définit de manière analogue :

- les suites de E, comme applications de $\mathbb{N}$ dans E, notations : u, (u_n), $(u_n)_{\mathbb{N}}$,

l'ensemble des suites de E est noté $E^{\mathbb{N}}$,

- les suites de E définies à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, comme applications de $[\![n_0, +\infty [\![$ dans E, notation : $(u_n)_{n \geqslant n_0}$,
- les opérations sur $E^{\mathbb{N}}$: addition et produit par un scalaire. $E^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
- les suites extraites d'une suite donnée $(u_n)_{\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Définition 18

Suites bornées

Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ de E est bornée si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \| u_n \| \leqslant A.$$

L'ensemble $\mathcal{B}(E)$ des suites bornées de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

Définition 19

Suites convergentes

Soit u une suite de E et a un point de E.

On dit que la suite u a pour limite a, ou converge vers a, si la suite réelle $n \mapsto \| u_n - a \|$ a pour limite 0.

On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \iff \lim\limits_{n \to +\infty} \| u_n - a \| = 0.$ (18)

(18) La notion de suite convergente dans E est ainsi ramenée à celle d'une suite dans $\mathbb{R}$.

Remarques

1) Une suite convergente a une seule limite.
2) Une suite convergente est bornée.
3) L'ensemble $\mathcal{C}(E)$ des suites convergentes de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(E)$.

   L'application $L : \mathcal{C}(E) \to E, x \mapsto \lim x_n$ est linéaire.
4) Si la suite u converge vers a alors on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $r_n = \sup\limits_{p \geqslant n} \| u_p - a \|$.

   On constate que la suite réelle $n \mapsto r_n$ est positive, décroissante et converge vers 0.

Définition 20

Suites de Cauchy

Soit u une suite bornée de E, notons $\delta_n = \sup\{\| u_p - u_q \| / p \geqslant n, q \geqslant n\}$.

On dit que u est une suite de Cauchy si la suite réelle $(\delta_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarques

1) La suite $(\delta_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante.
2) La définition s'écrit traditionnellement :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n \in \mathbb{N}, \ \forall p \geqslant n, \ \forall q \geqslant n, \quad \| u_p - u_q \| < \varepsilon.$$

3) Il est commode aussi d'introduire $\varepsilon_n = \sup\limits_{p \geqslant n} \| u_{n+p} - u_n \|$.

   u est une suite de Cauchy si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Définition 21

Valeur d'adhérence

On dit qu'un point a de E est valeur d'adhérence de la suite u de E s'il existe une suite extraite de u qui converge vers a.

Définition 22

Un espace vectoriel normé est dit **complet** si, dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente. On dit alors que c'est un **espace de Banach**. [19]

[19] Un espace préhilbertien complet est appelé un **espace de Hilbert**.

Définition 23

Une **partie** A de E est dite **complète** si toute suite de Cauchy formée de points de A est convergente dans A.

Propriété 4

L'espace vectoriel normé $\ell^\infty(E)$

Soit $\mathcal{B}(E)$ l'espace vectoriel des suites bornées de E.

L'application $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R},\ (u_n)_\mathbb{N} \mapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$ est une norme sur $\mathcal{B}(E)$.

L'espace vectoriel normé $\left(\mathcal{B}(E), \|\cdot\|_\infty\right)$ est noté $\ell^\infty(E)$.

Propriété 5

Normes équivalentes et suites convergentes

Soit N_1 et N_2 deux normes de E.

a) Pour que toute suite convergeant vers 0 dans (E, N_1) soit convergente vers 0 dans (E, N_2), il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $N_2 \leqslant \beta N_1$.

b) Pour que, pour toute suite u de E,

u converge vers 0 dans (E, N_1) soit équivalent à u converge vers 0 dans (E, N_2),

il faut et il suffit qu'il existe des réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1. \text{ [20]}$$

[20] En remplaçant au besoin u par $u - \ell$, $\ell \in E$, il en résulte que les notions de convergence et de limite d'une suite sont identiques dans (E, N_1) et (E, N_2) si et seulement si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

a) Si $N_2 \leqslant \beta N_1$, soit $(u_n)_\mathbb{N} \in E^\mathbb{N}$ convergeant vers 0 dans (E, N_1).

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} N_1(u_n) = 0$ et $N_2(u_n) \leqslant \beta N_1(u_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(u_n) = 0$.

Supposons maintenant que toute suite convergeant vers 0 dans (E, N_1) soit aussi convergente vers 0 dans (E, N_2).

En l'absence de réel $\beta > 0$ tel que $N_2 \leqslant \beta N_1$, le rapport $\dfrac{N_2}{N_1}$ serait non majoré sur $E \setminus \{0\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourrait donc trouver $u_n \in E \setminus \{0\}$ tel que $\dfrac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)} \geqslant n$ ce qui s'écrit :

$$N_2\left(\frac{u_n}{n\,N_1(u_n)}\right) \geqslant 1.$$

La suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n\,N_1(u_n)}$ ne converge pas vers 0 dans (E, N_2) car $N_2(v_n) \geqslant 1$,

et elle converge vers 0 dans (E, N_1) car $N_1(v_n) = \dfrac{1}{n}$. C'est contraire à l'hypothèse de départ, l'existence de β en résulte.

b) On applique deux fois le a).

Propriété 6

Relations entre suite extraite, suite convergente et suite de Cauchy

a) Une suite convergente est une suite de Cauchy.

b) Une suite extraite d'une suite convergente u est convergente et a la même limite.

c) Une suite extraite d'une suite de Cauchy est encore une suite de Cauchy.

d) Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence a et, dans ce cas, elle converge vers a.

a) et b) : soit (u_n) convergente vers ℓ dans $(E, \|\cdot\|)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}, \ p \geqslant n_0 \ \Rightarrow \ \| u_p - \ell \| < \varepsilon$.

Alors, a) est conséquence de l'inégalité triangulaire :

$$\| u_p - u_q \| \leqslant \| u_p - \ell \| + \| \ell - u_q \|.$$

Pour b), si (v_n) est extraite de $(u_n)_{\mathbb{N}}$, alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, \ v_n = u_{\varphi(n)}$.

Il s'ensuit que, pour tout $p \in \mathbb{N}, \ \varphi(p) \geqslant p$ donc $p \geqslant n_0$ donne $\varphi(p) \geqslant n_0$ et la conclusion en résulte.

c) et d) : soit (u_n) une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \ p \geqslant n_0 \ \Rightarrow \ \| u_{p+q} - u_p \| < \varepsilon$.

Pour c), si $(v_n) = \left(u_{\varphi(n)}\right)$ est extraite de $(u_n)_{\mathbb{N}}$, la conclusion résulte encore de $\varphi(p) \geqslant p$.

Pour d), si a est valeur d'adhérence de la suite de Cauchy (u_n), il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de limite a. La conclusion résulte alors de :

$$\begin{aligned} \| u_n - a \| &\leqslant \| u_n - u_{\varphi(n)} \| + \| u_{\varphi(n)} - a \| \\ &\leqslant \sup_{\substack{p \geqslant n \\ q \geqslant n}} \| u_p - u_q \| + \| u_{\varphi(n)} - a \| \end{aligned}$$

Propriété 7

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés ✎ (21)

✎ (21) C'est-à-dire caractérisation au moyen des suites.

Soit A une partie non vide de E.

a) Si une suite de points de A converge dans E, alors sa limite est un point adhérent de A.

b) Si un point de E est adhérent à A, il existe une suite de A qui converge vers ce point.

c) A est un fermé de E si et seulement si A contient la limite de toute suite formée de points de A et convergente dans E.

a) Avec $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, écrivons :

$$0 \leqslant d(\ell, A) \leqslant \| \ell - u_n \| \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \| \ell - u_n \| = 0$$

donc $d(\ell, A) = 0$ ce qui signifie que $\ell \in \overline{A}$ (cf. exemple 7).

b) Supposons $\ell \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un point a_n de A tel que :

$$\| \ell - a_n \| < \frac{1}{n} \quad \text{car} \quad A \cap B_o\left(\ell, \frac{1}{n}\right) \quad \text{n'est pas vide.}$$

La suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

c) Montrons d'abord que A est un fermé si et seulement si il contient tous ses points adhérents. On a en effet les équivalences successives suivantes :

$$\begin{aligned} A \text{ fermé} &\iff E \setminus A \text{ ouvert} \\ &\iff \forall x \in E \setminus A, \ \exists r > 0, \ B_o(x, r) \subset E \setminus A \\ &\iff \forall x \in E \setminus A, \ \exists r > 0, \ B_o(x, r) \cap A = \varnothing \\ &\iff \forall x \in E \setminus A, \ x \notin \overline{A} \\ &\iff \overline{A} \subset A. \end{aligned}$$

Alors, si A est un fermé de E on conclut en utilisant le a), puis le b) donne la réciproque.

B. Étude locale des applications Continuité

Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, |\cdot|)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Étant donné D partie non vide de E, $\mathcal{F}(D, F)$ désigne l'ensemble des applications de D dans F c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de E dans F, dont l'ensemble de définition est D.

$\mathcal{F}(D, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles : somme de deux fonctions et produit d'une fonction par un scalaire.

Dans le cas particulier où $F = \mathbb{K}$, on dispose de l'opération produit de deux fonctions, et $\mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

1. Limite – Continuité

Définition 24

Limite en un point

Soit $f \in \mathcal{F}(D, F)$, $A \subset D$ et $a \in \bar{A}$.

On dit que f admet une **limite en** a **suivant** A s'il existe un point b de F tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| < \alpha \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \quad (1)$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = b$.

Remarques

1) S'il existe b et b' dans F vérifiant (1) alors $b = b'$. [22]

On a en effet : $\forall x \in A,\ |b - b'| \leq |f(x) - b| + |f(x) - b'|$

donc en appliquant (1), on obtient : $\forall \varepsilon > 0,\ |b - b'| < \varepsilon$, ce qui exige $b = b'$.

2) Soit Δ telle que $A \subset \Delta \subset D$, si $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f|_\Delta(x) = b$. [23]

3) Extension dans le cas où $E = \mathbb{R}$, $a = +\infty$, $A \supset [\alpha, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \beta \in A,\ \forall x \in A,\ x > \beta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$ [24]

4) Extension dans le cas où $F = \mathbb{R}$, $b = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = +\infty$ se traduit par :

$$\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| < \alpha \Rightarrow f(x) > B$$ [25]

Définition 25

Continuité en un point

$f \in \mathcal{F}(D, F)$ est continue en un point a de D si f admet une limite en a suivant D. [26]

Remarque

La limite de f en a suivant D ne peut être que $f(a)$.

En effet, pour $x = a$ la condition $\|x - a\| < \alpha$ est réalisée quel que soit $\alpha > 0$, donc avec $b = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x)$, (1) donne $\forall \varepsilon > 0,\ |f(a) - b| < \varepsilon$, ce qui exige $b = f(a)$.

Ainsi f est continue en $a \in D$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = f(a)$, soit si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ f(D \cap B_o(a, r)) \subset B_o(f(a), \varepsilon).$$

[22] Cette propriété justifie la notation $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = b$.

[23] $f|_\Delta$ désigne la restriction de f à Δ.

[24] Écrire l'extension analogue correspondant au cas $a = -\infty$.

[25] Écrire l'extension analogue correspondant au cas $b = -\infty$.

[26] Étant donnés $a \in D$ et $r > 0$, il ressort de cette définition que f est continue en a si et seulement si sa restriction à $D \cap B_o(a, r)$ est continue en a : la continuité est une propriété locale.

Définition 26

Continuité sur une partie

$f \in \mathcal{F}(D, F)$ est continue sur D si f est continue en tout point de D.

Étant donné $A \subset D$, on dit que f est continue sur A lorsque la restriction $f_{|A}$ est continue en tout point de A.

Définition 27

Fonction lipschitzienne

$f \in \mathcal{F}(D, F)$ est dite lipschitzienne sur $A \subset D$ si l'ensemble :

$$R = \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} / (x, y) \in A^2, x \neq y \right\} \quad \text{est majoré.}$$

Si le réel k est un majorant de R, par exemple si $k = \sup R$, on dit que f est lipschitzienne de rapport k ou k-lipschitzienne sur A. ✎(27)

✎(27) Dans ces conditions : $\forall (x, y) \in A^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\| x - y \|$.

Exemples

- L'application $\|\cdot\|$ (norme) est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $\mathbb{R}$.
  En effet, la deuxième inégalité triangulaire donne :
  $$\forall (x, y) \in E^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leqslant \|x - y\|.$$
- A étant une partie fixée non vide de E, l'application distance à A, $d_A : x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne (voir exemple 7).

Définition 28

Homéomorphisme

Soit A une partie de E, B une partie de F, et f une bijection de A sur B.

On dit que f est un homéomorphisme si f est continue sur A et f^{-1} continue sur B.

Définition 29

Isométrie ✎(28)

Soit A une partie de E, et f une application de A dans F.

On dit que f est une isométrie si, pour tout couple $(x, y) \in A^2$:

$$\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|.$$

✎(28) On vérifie facilement que toutes les notions introduites précédemment : limite, continuité, fonctions lipschitziennes, homéomorphismes, sont invariantes par un changement de normes équivalentes dans E ou F. Mais ce n'est évidemment pas le cas pour les isométries.

Théorème 1

Soit $f : E \to F$ une application continue sur E. ✎(29)

a) Pour tout ouvert V de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de A.

b) Pour tout fermé W de F, $f^{-1}(W)$ est un fermé de A.

✎(29) C'est essentiellement ce théorème qui nous permettra de prouver que telle partie est ouverte ou fermée.

☞ a) Si $f^{-1}(V)$ est vide, c'est un ouvert.

Si $f^{-1}(V)$ est non vide : pour tout $x \in f^{-1}(V)$, $y = f(x)$ appartient à V et, puisque V est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_o(y, \varepsilon) \subset V$.

La continuité de f en x donne l'existence de $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f\big(B_o(x, r)\big) \subset B_o(y, \varepsilon)$ donc tel que : $\quad B_o(x, r) \subset f^{-1}\big(B_o(y, \varepsilon)\big) \subset f^{-1}(V)$.

b) $V = F \setminus W$ est un ouvert de F donc $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E et $f^{-1}(W) = E \setminus f^{-1}(V)$ est un fermé de E.

Propriété 8

Continuité des fonctions lipschitziennes

Étant donné $f \in \mathcal{F}(D, F)$ et $A \subset D$, si f est lipschitzienne sur A de rapport k, alors f est continue sur A.

Propriété 9

Caractérisation séquentielle des limites

Soit $f \in \mathcal{F}(D, F)$, $A \subset D$ et $a \in \overline{A}$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f admet une limite en a suivant A,

(2) pour toute suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{\mathbb{N}}$ de F est convergente.

- (1) $\Rightarrow$ (2)

Notons $b = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$ et considérons une suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ de A qui converge vers a.

L'hypothèse $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \ \| x - a \| < \alpha \Rightarrow \| f(x) - b \| < \varepsilon$ donne l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p \Rightarrow \| a_n - a \| < \alpha \Rightarrow \| f(a_n) - b \| < \varepsilon$, c'est-à-dire que la suite $\big(f(a_n)\big)_{\mathbb{N}}$ converge vers b.

- (2) $\Rightarrow$ (1)

Si $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{\mathbb{N}}$ sont deux suites de A qui convergent vers a, alors les suites $\big(f(a_n)\big)_{\mathbb{N}}$ et $\big(f(a'_n)\big)_{\mathbb{N}}$ convergent dans F ; vérifions que leurs limites b et b' sont égales.

Pour cela, il suffit de mixer les suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{\mathbb{N}}$ en notant : $\begin{cases} c_{2n} & = & a_n \\ c_{2n+1} & = & a'_n \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(c_{2n}) = b = \lim\limits_{n \to +\infty} f(c_{2n+1}) = b'$.

Il s'ensuit que b est la seule limite possible de f en a.

Par l'absurde, si f n'admet pas b pour limite en a :

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall \alpha > 0, \ \exists x_\alpha \in A \cap B_0(a, \alpha) \quad \text{tel que} \quad \| f(x_\alpha) - b \| \geqslant \varepsilon$$

d'où en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A$ tel que $\| a_n - a \| < \dfrac{1}{n}$ et $\| f(a_n) - b \| \geqslant \varepsilon$.

On a ainsi formé une suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ qui converge vers a sans que la suite $\big(f(a_n)\big)_{\mathbb{N}}$ converge vers b, ce qui est contradictoire.

Remarque

Avec $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $b = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$, on a $b \in \overline{f(A)}$, (d'après la caractérisation de l'adhérence par les suites).

Propriété 10

Égalité de deux applications continues

Soit f et g deux applications continues de A dans F, et B une partie de A dense dans A.

Si f et g coïncident sur B alors elles sont égales.

Il s'agit de prouver que $f_{|B} = g_{|B} \Rightarrow f = g$.

Tout point x de A est limite d'une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ de points de B, [30] et la continuité de f et g en x donne : $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$, $g(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n)$.

Puisque $f_{|B} = g_{|B}$ les suites $\big(f(x_n)\big)_{\mathbb{N}}$ et $\big(g(x_n)\big)_{\mathbb{N}}$ sont égales et on en déduit $f(x) = g(x)$.

[30] D'après la caractérisation séquentielle des points adhérents.

Propriété 11

Composition de fonctions continues

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, A une partie de E, B une partie de G, f une application de A dans F et g une application de B dans G.

Si, de plus, $f(A) \subset B$, on dispose de l'application composée $g \circ f$ de A dans G.

a) **Limite**

Si f admet une limite b en $a \in \overline{A}$ et si g admet une limite c en b alors $g \circ f$ admet c pour limite en a : $c = \lim\limits_{x \to a, x \in A} g \circ f(x)$.

b) **Continuité**

Si f est continue sur A et g continue sur B, alors $g \circ f$ est continue sur A.

(31) Ce qui prouve, d'après la caractérisation séquentielle des points adhérents, que $b \in \overline{B}$.

a) Utilisons deux fois la propriété **9**.
Soit $(x_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de A qui converge vers a. Alors :
la suite $\big(f(x_n)\big)_{\mathbb{N}}$ de B converge vers b (31) et la suite $\big(g\big(f(x_n)\big)\big)_{\mathbb{N}}$ converge vers c.
b) C'est un corollaire immédiat du a).

Propriété 12

Propriétés des isométries

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, et $f : A \to F$ une isométrie.

a) f est lipschitzienne de rapport 1.

b) f est injective donc elle induit une bijection de A sur $B = f(A)$, dont la bijection réciproque $f^{-1} : B \to A$ est une isométrie ; f est alors un homéomorphisme de A sur B.

c) La composée de deux isométries est une isométrie.

Propriété 13

Opérations sur les limites

Soit $f : A \to F$, $g : A \to F$ et $a \in \overline{A}$ ainsi que $\varphi : A \to \mathbb{K}$.

a) L'existence de : $u = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$, $v = \lim\limits_{x \to a, x \in A} g(x)$, $\mu = \lim\limits_{x \to a, x \in A} \varphi(x)$

fournit les nouvelles limites :

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) + g(x) = u + v \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a, x \in A} \varphi(x) f(x) = \mu u.$$

b) Si $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ est un produit d'espaces vectoriels normés et si $f : A \to F$ est donnée par ses applications composantes $x \mapsto f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$, alors f admet une limite b en a suivant A si et seulement si chaque f_i, $i \in [\![1, p]\!]$, admet une limite b_i en a suivant A. Dans ce cas $b = \big(b_1, b_2, \ldots, b_p\big)$.

a) Pour la deuxième formule, noter le découpage suivant :

$$\varphi(x)f(x) - \mu u = \big[\varphi(x) - \mu\big] f(x) + \mu \big[f(x) - u\big]$$

qui permet de majorer $|\varphi(x)f(x) - \mu u|$ par l'inégalité triangulaire.

b) Pour montrer que l'existence de $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$ implique celle de $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f_i(x)$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, utiliser la norme sur F définie par $\|(x_1, x_2, \ldots, x_p)\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_{F_i}$ où $\|\cdot\|_{F_i}$ est la norme sur F_i.

Pour la réciproque, utiliser la norme sur F définie par : $\|(x_1, x_2, \ldots, x_p)\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{p} \|x_i\|_{F_i}$.

Propriété 14

Opérations sur les fonctions continues

(32) C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,F)$.

(33) La norme sur F est notée $|\cdot|$.

a) $\mathcal{C}(A, F)$ ensemble des fonctions continues de A dans F est un espace vectoriel. (32)

b) $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

c) Si $f : A \to F$ et $\varphi : A \to \mathbb{K}$ sont continues sur A alors $\varphi f : A \to F$ est continue sur A.

d) Si $f : A \to F$ est continue sur A, alors $|f| : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ est continue. (33)

e) Si $\varphi : A \to \mathbb{K}$ est continue sur A et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{\varphi}$ est définie et continue sur A.

f) Si $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ est un produit d'espaces vectoriels normés et si $f : A \to F$ est donnée par ses applications composantes $x \mapsto f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$, alors f est continue sur A si et seulement si chaque $f_i : A \to F_i$ est continue sur A $(1 \leq i \leq p)$.

Ce sont des conséquence des opérations sur les limites.

E et F sont deux espaces vectoriels normés.

Exemple 8 Soit $f : E \to F$ continue sur E et $A \subset E$.

Montrer que, si A est dense dans E, alors $f(A)$ est dense dans $f(E)$.

D'après la caractérisation séquentielle des points adhérents, A est dense dans E si et seulement si tout point de E est limite d'une suite de points de A.

Soit donc $y \in f(E)$: il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Puisque A est dense dans E, il existe une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ de points de A telle que $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Alors la continuité de f en x donne : $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$.

Ainsi $y \in f(E)$ est limite de la suite $\big(f(x_n)\big)_{\mathbb{N}}$ formée de points de $f(A)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in f(E)$, on a $f(E) \subset \overline{f(A)}$.

Exemple 9 Soit f et g deux applications continues de E dans F. Montrer que :

$A = \{x \in E / f(x) = g(x)\}$ est fermé , $B = \{x \in E / f(x) < g(x)\}$ est ouvert.

On observe que A et B sont les images réciproques respectives par $g - f$ du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ et de l'ouvert $]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

Comme $g - f$ est continue, A est un fermé de E et B est un ouvert.

2. Relations de comparaison au voisinage d'un point

Ces relations ont été introduites en Analyse – PCSI ou MPSI, chapitre 8, dans le cadre des fonctions réelles d'une variable réelle.

E , F , G sont des espaces vectoriels normés de normes notées $\|\cdot\|$, $|\cdot|_F$, $|\cdot|_G$.

A est une partie de E et a un point de E adhérent à A.

On pose alors $\mathcal{V}_A(a) = \{A \cap B_0(a, r) \,/\, r \in \mathbb{R}_+^*\}$.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, a est un point de $\overline{\mathbb{R}}$, donc éventuellement $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, et on pose alors :

$$\mathcal{V}_A(+\infty) = \{A \cap]r, +\infty[\,/\, r \in \mathbb{R}\} \ , \ \mathcal{V}_A(-\infty) = \{A \cap]-\infty, r[\,/\, r \in \mathbb{R}\}. \ (34)$$

(34) On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est vraie **au voisinage de** a si et seulement si il existe $V \in \mathcal{V}_A(a)$ tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie pour tout $x \in V$.

2.1 – Domination – Prépondérance

f et g sont des fonctions définies sur A à valeurs dans F et G :

$$f : A \to F \quad , \quad g : A \to G.$$

Définition 30

f est **dominée** par g au voisinage de a suivant A, et on note $f = O_a(g)$ ou $f = O(g)$, lorsque :

$$\exists V \in \mathcal{V}_A(a), \ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in V \quad |f(x)|_F \leqslant \lambda\, |g(x)|_G .$$

Définition 31

f est **négligeable** devant g (35) au voisinage de a suivant A, et on note $f = o_a(g)$ ou $f = o(g)$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists V \in \mathcal{V}_A(a), \ \forall x \in V, \quad |f(x)|_F \leqslant \varepsilon\, |g(x)|_G .$$

(35) Ou aussi que g est **prépondérante** devant f.

Remarques

1) Le cas $E = \mathbb{R}, A = \mathbb{N}, a = +\infty$ donne les relations de comparaison entre suites à valeurs dans un espace vectoriel normé.

2) Les fonctions f et g considérées ont un ensemble de définition commun (ici A) mais ne prennent pas nécessairement leurs valeurs dans le même espace vectoriel (ici F et G). En fait, seules les fonctions normes interviennent :

$$|f|_F : A \to \mathbb{R}, x \mapsto |f(x)|_F \quad \text{et} \quad |g|_G : A \to \mathbb{R}, x \mapsto |g(x)|_G .$$

Donc $f = o_a(g)$ s'interprète en $|f|_F = o_a(|g|_G)$.

En particulier, $f = o_a(1)$ signifie $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = 0$.

Il est d'usage courant de comparer, par exemple, une suite complexe ou vectorielle à une suite réelle. $\left(\frac{1}{n+i} = o(1)\right.$ signifie $\left.\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+i} = 0.\right)$

Dans la mesure où les opérations sont légitimes dans les espaces vectoriels considérés, toutes les propriétés des relations de domination ou de de prépondérance exposées en Analyse – PCSI ou MPSI restent valables.

2.2 – Équivalence

f et g sont des fonctions définies sur A à valeurs dans le même espace vectoriel normé F.

Définition 32

f est **équivalente** à g au voisinage de a suivant A, et on note $f \underset{a}{\sim} g$ lorsque $f - g = o_a(g)$.

Remarques

1) Pour l'équivalence de fonctions ou de suites, il est impératif que l'espace d'arrivée soit commun. ✎[36]

2) $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a.

✎[36] Pour assurer l'existence de $f(x)-g(x)$, ou de $u_n - v_n$.

3. Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Définition 33

Partie compacte

Étant donné un espace vectoriel normé E de dimension finie, une partie A de E est dite **compacte** si et seulement si elle est fermée et bornée. ✎[37]

✎[37] La partie vide est donc compacte.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $(a < b)$, est un intervalle compact ; $\{1\} \cup [2, 3]$, $\{0, 1, 2\}$ sont des compacts ; $[1, +\infty[$ est un intervalle fermé mais non borné, il est donc non compact.
- Dans $\mathbb{C}$, le disque $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leqslant 1\}$ est compact.

Théorème 2

Image continue d'un compact

Soit E et F des espaces vectoriels normés de dimensions finies et f une application continue de $A \subset E$ dans F.

Alors, si A est une partie compacte de E, son image $f(A)$ est une partie compacte de F.

☞ Résultat admis.

Corollaire

Fonctions numériques continues sur un compact

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie compacte de E et f une application continue de A dans $\mathbb{R}$.

Alors f est bornée sur A et elle atteint ses bornes.

☞ $f(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une partie fermée et bornée.

La partie $f(A)$ étant bornée, $\sup f(A)$ et $\inf f(A)$ existent, et étant aussi fermée, ces deux bornes, qui a priori sont éléments de $\overline{f(A)}$, sont dans $f(A)$.

Il existe donc x_1 et x_2 dans A tels que :

$$\sup_{x \in A} f(x) = f(x_1) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in A} f(x) = f(x_2).$$

Propriété 15

Intersection d'un fermé et d'un compact

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

Si B est une partie fermée de E alors $B \cap A$ est aussi une partie compacte de E.

A est compacte donc fermée dans E. La partie B de E étant aussi un fermé, $B \cap A$ est un fermé de E en tant qu'intersection de deux fermés de E.

A est compacte donc bornée et puisque $B \cap A \subset A$, il en est de même pour $B \cap A$. Finalement, $B \cap A$ est un compact de E en tant que partie fermée-bornée.

Exemple 10 Soit S la sphère unité de l'espace vectoriel normé $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$:

$$S = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1\right\}$$

et soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que l'application $N : E \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne donc continue sur E.

b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha = \inf\limits_{x \in S} N(x)$.

c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \; N(x) \geqslant \alpha \| x \|_1$.

a) Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a, en notant $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{donc} \quad N(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, N(e_i)$$

et, en posant $k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} N(e_i)$: $\quad N(x) \leqslant k \| x \|_1$.

La deuxième inégalité triangulaire donne alors : $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y) \leqslant k \| x - y \|_1$.

Ainsi N est k-lipschtzienne de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ dans $\mathbb{R}$.

b) S est un compact de $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$.

Donc l'application continue N est bornée inférieurement sur S et atteint cette borne : il existe $x_0 \in S$ tel que $N(x_0) = \inf\limits_{x \in S} N(x)$.

Posons $\alpha = N(x_0)$, puisque N est une norme et x_0 est non nul, on a $\alpha > 0$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\dfrac{x}{\| x \|_1}$ appartient à S, donc :

$$N\left(\frac{x}{\| x \|_1}\right) \geqslant \alpha \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{\| x \|_1} N(x) \geqslant \alpha \quad \text{d'où encore} \quad N(x) \geqslant \alpha \| x \|_1 .$$

Il reste à noter que cette inégalité reste vraie lorsque $x = 0$.

C. Continuité des applications linéaires

Les programmes n'envisagent que le cas des espaces de dimension finie.
Les étudiants doivent simplement savoir que toute application linéaire f d'un e-v-n (E,N) de dimension finie dans un autre e-v-n (F,N') est continue sur E et que ceci se déduit de l'existence d'un réel $k>0$ tel que : $\forall x \in E, \; N'\big(f(x)\big) \leqslant k\,N(x)$
Ces résultats se déduisent naturellement du théorème 3 qui ne comporte pas d'hypothèse de dimension.

E, F, G désignent des espaces vectoriels normés. Les normes sont toutes notées $\|\cdot\|$.

Théorème 3

Caractérisation des applications linéaires continues

Pour une application linéaire f de E dans F les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue sur E

(2) f est continue au point 0_E

(3) f est bornée sur la boule unité fermée $B_f(0_E, 1)$

(4) il existe $k \geqslant 0$ tel que pour tout x de E : $\| f(x) \| \leqslant k \| x \|$

(5) f est lipschitzienne.

Il est facile de faire une démonstration circulaire.

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$$

- (2) $\Rightarrow$ (3)

En utilisant la continuité en 0_E, il existe $\alpha > 0$, tel que $\|x\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant 1$.
Tout vecteur y de la boule unité fermée vérifie $\|\alpha y\| = \alpha\|y\| \leqslant \alpha$ donc :

$$f(y) = \frac{1}{\alpha}f(\alpha y) \quad \text{donne} \quad \|f(y)\| = \frac{1}{\alpha}\|f(\alpha y)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Ainsi f est bornée sur la boule unité fermée.

- (3) $\Rightarrow$ (4)

Exprimons que f est bornée sur la boule unité fermée :

$$\exists k \geqslant 0, \forall x \in E, \|x\| \leqslant 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant k.$$

Pour tout vecteur non nul y, on a $\dfrac{y}{\|y\|} \in B_f(0_E, 1)$ donc :

$$\left\|f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leqslant k \quad \text{et} \quad \|f(y)\| \leqslant k\|y\|.$$

Sachant que $f(0) = 0$, l'inégalité $\|f(y)\| \leqslant k\|y\|$ est valable pour tout y de E.

- Les autres implications sont sans difficulté.

Remarques

1) La continuité de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ reste acquise par le changement d'une norme en une norme équivalente, dans E comme dans F. En revanche, f peut être continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$ et non continue sur $(E, \|\cdot\|_2)$ quand $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.
2) Dans les propriétés du théorème **3**, on peut remplacer :
   en (2) le point 0_E par tout autre point de E,
   en (3) la boule unité fermée par toute autre boule de rayon non nul, même ouverte, ou par une sphère de rayon non nul.
3) Souvent la mise en défaut de la continuité d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ se fait en exhibant une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ de la boule unité de E telle que la suite $\left(f(x_n)\right)_{\mathbb{N}}$ soit non bornée, ($\lim\limits_{n\to+\infty} \|f(x_n)\| = +\infty$ par exemple).

Théorème 4

Espace des applications linéaires continues

L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace de $\mathcal{L}(E, F)$ que l'on notera $\mathcal{L}_c(E, F)$.

$\mathcal{L}_c(E, F)$ est non vide et stable par l'addition des fonctions et la multiplication d'une fonction par un scalaire.

Exemple 11 Application linéaire non continue Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels normé par :

$$P = \sum_{i=0}^{q} a_i X^i \mapsto \|P\|_\infty = \sup_{0\leqslant i\leqslant q} |a_i|$$

La forme linéaire φ sur E définie par $\varphi(P) = P(1)$ pour tout P de E n'est pas continue.
Il s'agit bien d'une application linéaire définie sur des espaces vectoriels normés :

$$\varphi : E \to \mathbb{R}, \quad P \mapsto P(1)$$

E normé par $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathbb{R}$ par la valeur absolue.
Essayons d'appliquer la remarque 3) précédente.
Notons $P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$; on a alors $\|P_n\|_\infty = 1$ et $\varphi(P_n) = P_n(1) = n + 1$.
Voilà un exemple d'une suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$ de la sphère unité dont la suite des images $\left(\varphi(P_n)\right)_{\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
L'application linéaire φ n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exemple 12 Effet d'un changement de norme

Reprenons les notations de l'exemple **11** et considérons sur $E = \mathbb{R}[X]$ deux autres normes :

$$\| P \|_1 = \sum_{i=0}^{q} |a_i| \quad \text{et} \quad \| P \|_2 = \left(\sum_{i=0}^{q} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(1)$ est-elle continue sur $(E, \| \cdot \|_1)$, sur $(E, \| \cdot \|_2)$? ✎(38)

- $\| P \|_1$ et $\varphi(P)$ sont liées par :

$$|\varphi(P)| = |P(1)| = \left| \sum_{i=0}^{q} a_i \right| \leqslant \sum_{i=0}^{q} |a_i| = \| P \|_1$$

φ est bornée sur la boule unité de $(E, \| \cdot \|_1)$ $\quad (|\varphi(P)| \leqslant 1$ si $\| P \|_1 \leqslant 1.)$

L'application linéaire φ est continue sur $(E, \| \cdot \|_1)$.

- Reprenons la suite $n \mapsto P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$ de l'exemple **11** et calculons :

$$\| P_n \|_2 = \sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad P_n(1) = n+1.$$

Alors $Q_n = \dfrac{P_n}{\sqrt{n+1}}$ appartient à la boule unité fermée de $(E, \| \cdot \|_2)$

tandis que $\left(\varphi(Q_n)\right)_{\mathbb{N}} = \left(\sqrt{n+1}\right)_{\mathbb{N}}$ est une suite réelle non bornée.

Ainsi, l'application linéaire φ est non continue sur $(E, \| \cdot \|_2)$.

✎(38) Ces questions se justifient par le fait que les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Théorème 5

Norme d'une application linéaire continue

E et F désignant des espaces vectoriels normés, l'application :

$$\mathcal{L}_c(E, F) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto |||f||| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| f(x) \|$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Remarque

L'existence du réel $|||f|||$ pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est justifiée par la proposition **(3)** du théorème **13**.

☞ Notons B la boule unité fermée de E : $B_f(0_E, 1)$.

Vérifions les trois critères de définition d'une norme.

- Si $|||f||| = 0$, alors pour tout $x \in B$, $\| f(x) \| = 0$ et $f(x) = 0$.

Or, quel que soit $y \in E$, $x = \dfrac{y}{1 + \| y \|} \in B \quad$ donc $\quad f(y) = (1 + \| y \|) f(x) = 0$.

Conclusion : $\quad \| f \| = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$.

- Notons $\quad I(f) = \{\| f(x) \| / x \in B\} \subset \mathbb{R}_+$ pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

Comme $\quad I(\lambda f) = |\lambda|\, I(f)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\sup I(\lambda f) = |\lambda| \sup I(f) \quad \text{c'est-à-dire} \quad |||\lambda f||| = |\lambda|\; |||f|||.$$

- Soit f et g dans $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Pour tout x de B, on a $\quad \| f(x) + g(x) \| \leqslant \| f(x) \| + \| g(x) \| \leqslant |||f||| + |||g|||$. ✎(39)

donc $\sup_{x \in B} \| f(x) + g(x) \| \leqslant |||f||| + |||g||| \quad$ c'est-à-dire $\quad |||f+g||| \leqslant |||f||| + |||g|||$.

✎(39) $|||f|||+|||g|||$ est un majorant de $\{\| f(x)+g(x) \| \,/\, x \in B\}$ et $|||f+g|||$ est le plus petit majorant de cet ensemble.

Convention

Dès que E et F sont des espaces vectoriels sur lesquels des normes sur E et F ont été fixées, l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ est muni de la norme $||| \cdot |||$ précédente.

Cette norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ dépend des normes N_E et N_F choisies sur E et F, on dit qu'elle est **subordonnée** à N_E et N_F.

Théorème 6

Expressions de la norme d'une application linéaire continue

Pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on a :

a) $|||f||| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup\limits_{x \in E \setminus \{0_E\}} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$.

b) $|||f||| = \min\{k \in \mathbb{R}_+ \,/\, \forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq k\|x\|\}$.

a) Si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, l'existence de :

$$a = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|, \text{ de } b = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \text{ et de } c = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

résulte du théorème **13**, propositions **(3)** et **(4)**.

B désigne toujours la boule unité fermée de E et soit S la sphère unité.

On a $\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \left\| f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|$ et $\left\{\dfrac{x}{\|x\|} \,/\, x \in E \setminus \{0_E\}\right\} = S$ donc $b = c$

$S \subset B$ donne $b \leq a$.

Pour tout x de $B \setminus \{0_E\}$, on a $\|f(x)\| \leq \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ d'où $\|f(x)\| \leq c$, inégalité encore vérifiée pour $x = 0_E$ d'où $a \leq c$ soit aussi $a \leq b$.

Finalement $a = b = c$.

b) $\sup\limits_{x \in E \setminus \{0_E\}} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ est le plus petit majorant de l'ensemble $\left\{\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \,/\, x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$

donc c'est le plus petit des réels positifs k tels que $\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq k$.

Ainsi, on obtient $c = \min\{k \in \mathbb{R}_+ \,/\, \forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \|f(x)\| \leq k\|x\|\}$ donc aussi, puisque $f(0_E) = 0_F$, $c = \min\{k \in \mathbb{R}_+ \,/\, \forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq k\|x\|\}$.

Corollaire 1

Pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on a $\forall x \in E,\quad \|f(x)\| \leq |||f|||\ \|x\|$.

Corollaire 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle qu'il existe un réel k tel que, pour tout x de E, $\|f(x)\| \leq k\|x\|$. [40]

Alors f est continue et $|||f||| \leq k$.

[40] Ceci fournit une méthode pratique pour étudier la continuité d'une application linéaire.

Théorème 7

Composition d'applications linéaires continues

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $|||g \circ f||| \leq |||g|||\ |||f|||$.

D'après le corollaire 1 précédent : $\|g(y)\| \leq |||g|||\ \|y\|$ et $\|f(x)\| \leq |||f|||\ \|x\|$

d'où avec $y = f(x)$, on obtient, pour tout x de E $\|g \circ f(x)\| \leq |||g|||\ |||f|||\ \|x\|$.

Le corollaire 2 donne alors la continuité de $g \circ f$ avec $|||g \circ f||| \leq |||g|||\ |||f|||$.

Définition 34

On appelle **algèbre normée** toute $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une norme vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2,\quad N(x \cdot y) \leq N(x)\,N(y) \text{ et } N(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1.$$

On dit aussi que N est une **norme d'algèbre**.

Si l'espace vectoriel normé A est complet on dit que $\mathcal{A}$ est une **algèbre de Banach**. [41]

[41] Exemples :

- (E, N) étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $\mathcal{L}_c(E)$ muni de la norme subordonnée à N est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, d'élément unité Id_E.
- A étant un ensemble quelconque, l'ensemble $\mathcal{B}(A, \mathbb{C})$ des applications bornées de A dans $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, d'élément unité 1 (application constante).

D. Espaces vectoriels normés de dimension finie

1. Équivalence des normes

Théorème 8

Sur $\mathbb{K}^n$ deux normes quelconques sont équivalentes. [42]

[42] Ce résultat est admis.

Théorème 9

Équivalence des normes en dimension finie

Deux normes quelconques d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

[43] Application linéaire bijective.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, il existe φ isomorphisme [43] de $\mathbb{K}^n$ sur E.
$\|\cdot\|$ étant une norme sur E, $\|\cdot\|' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|\varphi(x)\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E, les normes $\|\cdot\|_1'$ et $\|\cdot\|_2'$ de $\mathbb{K}^n$ qui leurs sont associées par φ sont équivalentes, donc, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \alpha\|\varphi(x)\|_1 \leqslant \|\varphi(x)\|_2 \leqslant \beta\|\varphi(x)\|_1$$

ce qui donne $\forall y \in E, \quad \alpha\|y\|_1 \leqslant \|y\|_2 \leqslant \beta\|y\|_1$.

2. Continuité des applications linéaires et multilinéaires

Théorème 10

Continuité des applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, E étant de dimension finie, toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E et la norme définie par $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. [44]

[44] Toutes les normes sur E sont équivalentes puisque c'est un espace de dimension finie.

Avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ on a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(u_i)$ d'où $\|f(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ \|f(u_i)\|$

En notant $k = \sum_{i=1}^{n} \|f(u_i)\|$, il vient $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$, ce qui garantit la continuité de f.

Théorème 11

Endomorphismes d'un espace euclidien [45]

[45] Ce résultat est donné à titre d'exemple.

Soit E un espace euclidien de boule unité fermée $B = \{x \in E \,/\, \|x\| \leqslant 1\}$.

a) Tout endomorphisme f de E est continu et :

$$|||f||| = \sup_{(x,y)\in B^2} \left|\langle f(x) \mid y\rangle\right|.$$

b) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique positif, on a :

$$|||f||| = \sup_{x\in B} \langle f(x) \mid x\rangle = \rho(f)$$

où $\rho(f)$ est la plus grande valeur propre de f.

a) Un espace euclidien est de dimension finie. Tout endomorphisme f de E est donc continu.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left|\left\langle f(x) \mid y\right\rangle\right| \leqslant \| f(x) \| \| y \|.$$

Donc par définition de la norme de f, pour tout (x, y) de B^2, on a $\left|\left\langle f(x) \mid y\right\rangle\right| \leqslant |||f|||$

et on en déduit : $\displaystyle\sup_{(x,y)\in B^2} \left|\left\langle f(x) \mid y\right\rangle\right| \leqslant |||f|||$.

Pour tout x de B tel que $f(x) \neq 0$, on peut écrire :

$$\| f(x) \| = \left\langle f(x) \,\Big|\, \frac{f(x)}{\| f(x) \|}\right\rangle$$

et en posant $y = \dfrac{f(x)}{\| f(x) \|}$ on a $\| y \| = 1$ donc : $\| f(x) \| \in \left\{\left|\left\langle f(x) \mid y\right\rangle\right| \;/\; (x, y) \in B^2\right\}$.

Il en résulte $|||f||| = \displaystyle\sup_{x\in B} \| f(x) \| \leqslant \sup_{(x,y)\in B^2} \left|\left\langle f(x) \mid y\right\rangle\right|$. Finalement :

$$|||f||| = \sup_{(x,y)\in B^2} \left|\left\langle f(x) \mid y\right\rangle\right|.$$

b) On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique : $f = f^*$, et positif c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad \left\langle f(x) \mid x\right\rangle \geqslant 0 \qquad \text{(voir Algèbre – Géométrie, chapitre 6).}$$

L'inclusion $\left\{\left\langle f(x) \mid x\right\rangle \;/\; x \in B\right\} \subset \left\{\left|\left\langle f(x) \mid y\right\rangle\right| \;/\; (x, y) \in B^2\right\}$ donne :

$$\sup_{x\in B} \left\langle f(x) \mid x\right\rangle \leqslant \sup_{(x,y)\in B^2} \left|\left\langle f(x) \mid y\right\rangle\right| = |||f|||.$$

L'endomorphisme f étant symétrique, on sait qu'il existe une base orthonormale de E, $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ formée de vecteurs propres de f : $f(e_i) = \lambda_i e_i$; et la positivité de f donne $\forall \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$. On suppose $\lambda_1 = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i = \rho(f)$.

Soit alors $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un élément de B : $\| x \|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1$, on a :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \quad \text{donc} \quad \| f(x) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant \lambda_1^2 \quad \text{et} \quad |||f||| \leqslant \lambda_1.$$

Avec $\left\langle f(e_1) \mid e_1\right\rangle = \lambda_1$, il vient d'autre part $\lambda_1 \leqslant \displaystyle\sup_{x\in B} \left\langle f(x) \mid x\right\rangle$. Finalement :

$$\lambda_1 \leqslant \sup_{x\in B} \left\langle f(x) \mid x\right\rangle \leqslant |||f||| \leqslant \lambda_1 \quad \text{d'où} \quad |||f||| = \sup_{x\in B} \left\langle f(x) \mid x\right\rangle = \lambda_1 = \rho(f).$$

Corollaire

Dans un espace euclidien E, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

a) $|||f^*||| = |||f|||$

b) $|||f|||^2 = |||f^* \circ f||| = \rho(f^* \circ f)$.

a) $\left\langle f(x) \mid y\right\rangle = \left\langle f^*(y) \mid x\right\rangle$ on applique le théorème précédent, proposition a), pour obtenir $\| f^* \| = \| f \|$.

b) Avec $\left\langle f(x) \mid f(x)\right\rangle = \left\langle f^* \circ f(x) \mid x\right\rangle$, il vient :

$$|||f|||^2 = \sup_{x\in B} \| f(x) \|^2 = \sup_{x\in B} \left\langle f^* \circ f(x) \mid x\right\rangle.$$

Or $f^* \circ f$ est un autoadjoint positif donc le théorème précédent, proposition b), donne :

$$\sup_{x\in B} \left\langle f^* \circ f(x) \mid x\right\rangle = |||f^* \circ f||| = \rho(f^* \circ f).$$

Théorème 12

Continuité des applications multilinéaires

Soit $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels normés de dimension finie, F un espace vectoriel normé et $M : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ une application n-linéaire.

Alors M est continue.

Conformément au programme, limitons-nous au cas $n = 2$ et $E_1 = E_2 = E$; M est alors une application bilinéaire sur E à valeurs dans F.

Choisissons une base $(u_1, \dots, u_p)$ de E, une norme sur E : $\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i u_i \right\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$, une norme sur E^2 : $\|(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|)$.

- Montrons que M est bornée sur la boule unité de E^2.

Pour $(x, y) \in E^2$ et $x = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i$, $y = \sum_{j=1}^{p} y_j u_j$, la bilinéarité de M donne :

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j M(u_i, u_j)$$

et l'inégalité triangulaire $\|M(x, y)\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |x_i| \, |y_j| \, \|M(u_i, u_j)\|$.

En notant $k = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \|M(u_i, u_j)\|$ il vient $\|M(x, y)\| \leqslant k\|x\| \, \|y\|$.

Sur la boule unité de E^2, on a donc $\|M(x, y)\| \leqslant k$.

- Montrons ensuite que M est continue en tout point (a, b) de E^2.

La bilinéarité de M donne, pour tout (x, y) de E^2 :

$$\Delta = M(x, y) - M(a, b) = M(x - a, y) + M(a, y - b).$$

À présent, majorons Δ :

$$\|\Delta\| \leqslant \|M(x - a, y)\| + \|M(a, y - b)\| \leqslant k\|x - a\| \, \|y\| + k\|a\| \, \|y - b\|$$

En notant $h = \|(x, y) - (a, b)\| = \sup\left(\|(x - a)\|, \|y - b\|\right)$, on obtient :

$$\|y\| \leqslant \|b\| + h \quad , \quad \|\Delta\| \leqslant kh(\|a\| + \|b\| + h) \quad \text{et enfin} \quad \lim_{h \to 0} \Delta = 0.$$

Méthodes

L'essentiel

E, F... sont des e-v-n.

I. Normes

✔ **Si l'on veut** montrer que deux normes N_1 et N_2 sur E ne sont pas équivalentes,

- **on peut** rechercher $(x_n)_{\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = +\infty$ ou 0.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 1

II. Ouverts – Fermés

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une partie A de E est ouverte,

- **on peut**
  - en revenant à la définition, prouver que pour tout $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$,
  - interpréter A comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une partie B de E est fermée,

- **on peut**
  - vérifier que son complémentaire : $E \setminus B$ est un ouvert,
  - interpréter B comme image réciproque d'un fermé par une application continue,
  - utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

III. Continuité

✔ **Si l'on veut** montrer que deux applications $f : A \to F$ et $g : A \to F$, continues sur $A \subset E$, coïncident,

- **on peut** vérifier que leurs restrictions à une partie B dense dans A sont égales.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

IV. Compacité

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une application $f : A \to F$ est bornée et atteint ses bornes sur $A \subset E$,

- **on peut** penser à examiner si A est compact et f continue sur A ou, si ce n'est pas le cas, se ramener à un problème analogue en considérant la restriction de f à un compact $B \subset A$.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 5

V. Applications linéaires continues

✔ **Si l'on veut** calculer la norme d'une application linéaire continue f,

- **on peut** rechercher $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$, ce qui donne $|||f||| \leqslant k$, puis exhiber $x \in E$ vérifiant $\|f(x)\| = k\|x\|$ ou à défaut une suite (x_n) de la sphère unité telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f(x_n)\| = k$.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 6, 7 et 8

Mise en œuvre

I. Normes

Ex. 1

Soit E l'espace des suites complexes $u = (u_n)_{\mathbb{N}}$ bornées et telles que $u_0 = 0$.

On définit N_∞ et N par $\forall u \in E, \quad N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|, \quad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1) Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E.

2) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N \leqslant kN_\infty$. Quel est le plus petit k possible ?

3) Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

Indications

2) Pour qu'un réel k vérifiant $N \leqslant kN_\infty$ soit le plus petit possible, il suffit qu'il existe $v \in E$ tel que $N(v) = kN_\infty(v)$.

3) Considérer une suite $u(q)$ dépendant d'un paramètre q telle que $N_\infty\big(u(q)\big)$ puisse être rendu aussi grand que l'on veut (en jouant sur q) tandis que $N\big(u(q)\big)$ reste borné.

Solution

1) Il est immédiat que N_∞ et N vérifient les axiomes **(2)** et **(3)** des normes.
Pour tout $u \in E$ on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant N_\infty(u)$ donc, $N_\infty(u) = 0$ donne $u = 0$.
De même $N(u) = 0$ donne $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n$, u est alors constante et, puisque $u_0 = 0$, il vient $u = 0$.
Ainsi N_∞ et N sont des normes sur E.

2) Pour tout u de E, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ donne :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_{n+1}| + |u_n|$ d'où $N(u) \leqslant 2N_\infty(u)$.
Considérons la suite $v \in E$ telle que $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = (-1)^n$.
Elle vérifie : $N_\infty(v) = 1$ et $N(v) = 2$ donc, si $k \in \mathbb{R}_+^*$ est tel que $\forall u \in E, \quad N(u) \leqslant kN_\infty(u)$, on a $k \geqslant 2$.
Puisque le nombre 2 vérifie cette propriété, c'est le plus petit.

3) Étant donné $q \in]0, 1[$, considérons la suite u telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = q^n$.

On a alors pour tout $n \geqslant 1$, $u_n - u_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \big(u_{k+1} - u_k\big)$

donc $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

On vérifie ainsi que u est bien élément de E avec $N(u) = 1$

et $N_\infty(u) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{1 - q}$.

En conséquence, on a $\dfrac{N_\infty(u)}{N(u)} = \dfrac{1}{1 - q}$ et, ce rapport n'étant pas majoré quand q décrit $[0, 1[$, les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

Commentaires

On vérifie aisément que E est bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Noter que l'existence de $N_\infty(u)$ et $N(u)$ tient au caractère borné de u.

En fait il s'agit ici de calculer la borne supérieure sur $E \setminus \{0\}$ de $\dfrac{N}{N_\infty}$, et il se trouve que cette borne est atteinte : c'est un plus grand élément.

Nous nous trouvons déjà en présence du lien entre la suite (u_n) et la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, ce qui sera abondamment utilisé à partir du chapitre 2.

La suite u est positive croissante, sa borne supérieure est sa limite.

II. Ouverts–Fermés

Ex. 2

Soit A et B deux parties d'un e-v-n E, non vides, fermées et disjointes.

1) Trouver une fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f_{|A} = 0$, $f_{|B} = 1$.

2) En déduire l'existence de deux ouverts disjoints U et V de E tels que : $A \subset U$, $B \subset V$.

Indications

1) Utiliser les fonctions $x \mapsto d(x, A)$, $x \mapsto d(x, B)$.

2) Utiliser des images réciproques d'ouverts de $\mathbb{R}$.

Solution

1) Notons α et β les fonctions de E dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\alpha(x) = d(x, A) \quad \text{et} \quad \beta(x) = d(x, B).$$

Ainsi, les fonctions α et β sont continues sur E et la fonction $\alpha + \beta$ ne s'annule pas sur E.

Ceci justifie l'existence et la continuité de la fonction :

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Il est facile de vérifier que f est à valeurs dans $[0, 1]$ et que :

$$f_{|A} = 0 \quad , \quad f_{|B} = 1.$$

2) Notons $U = f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right)$ et $V = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$.

Ce sont des ouverts disjoints de E, et $A \subset U$, $B \subset V$ car $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$.

Commentaires

On a vu dans l'exemple 7 du cours que : $|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x - y\|$.

D'autre part, A étant fermée, on a $d(x,A)=0 \iff x \in A$.
et de même pour B.
Ainsi A et B étant fermées disjointes, on a pour tout x, $\alpha(x)>0$ ou $\beta(x)>0$ donc $(\alpha+\beta)(x)>0$

En tant qu'images réciproques d'ouverts disjoints de $\mathbb{R}$ par une fonction continue.

Ex. 3

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que l'ensemble des matrices semblables à A est fermé dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Indications

Caractériser un fermé à l'aide de suites.

Utiliser des polynômes annulateurs de A.

Solution

D'après la caractérisation séquentielle des fermés, il suffit pour faire la preuve, de montrer que, pour toute suite $(M_n)_{\mathbb{N}}$ de matrices semblables à A qui converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, la limite B est semblable à A.

Rappelons que M est semblable à A s'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ telle que :

$$M = P^{-1}AP.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $M^k = P^{-1}A^kP$ et, pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$:

$$Q(M) = P^{-1}Q(A)P.$$

L'hypothèse A diagonalisable se traduit par l'existence d'un polynôme Q scindé dans $\mathbb{C}[X]$ ayant ses racines simples et tel que $Q(A) = 0$.

Alors M_n, semblable à A, vérifie $Q(M_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = B$ donne $Q(B) = 0$, ce qui prouve que B est diagonalisable.

Commentaires

L'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ doit être muni d'une norme, par exemple :

$$\|A\| = \sup_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} |A_{ij}|$$

Cf. Algèbre–Géométrie, chapitre 4.

Continuité de $M \mapsto Q(M)$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

En prenant considérant le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(A - XI_p),$$

on a aussi $\forall n \in \mathbb{N},\ \chi_A = \det(M_n - XI_p)$

et le passage à la limite donne $\chi_B = \lim\limits_{n\to+\infty} \det(M_n - XI_p) = \chi_A$.

Les matrices A et B ont le même polynôme caractéristique et elles sont diagonalisables, elles sont donc semblables à la même matrice diagonale et par transitivité elles sont semblables.
Ainsi l'ensemble des matrices semblables à A est fermé dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

L'application $M \mapsto \det(M - XI_p)$ est en effet continue car ses composantes sur la base canonique de $\mathbb{K}_p[X]$ sont des fonctions polynômes des coordonnées de M.

III. Continuité

Ex. 4

On suppose que E et F sont des $\mathbb{R}$-e-v-n.

Soit $f : E \to F$ qui vérifie : $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Montrer que si f est continue en 0_E alors f est linéaire.

Indications

Établir $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ puis $\mathbb{R}$.

Solution

L'égalité $\|f(x+y) - f(x)\| = \|y\|$ montre que la continuité en 0_E entraîne la continuité sur E.

Fixons un vecteur x de E et notons g la fonction de $\mathbb{R}$ dans F définie par $g(t) = f(tx)$.

Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $g(u+v) = g(u) + g(v)$ pour tout couple (u, v) de réels.
Le problème revient à montrer que g coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $h : t \mapsto tf(x)$.

Montrons d'abord que pour tout $t \in \mathbb{Q}$, $f(tx) = tf(x)$: $(\mathcal{P})$
- la propriété $(\mathcal{P})$ est vraie pour $t = 0$ et $t = 1$,
- si elle est vraie pour n, elle l'est pour $n+1$ car $f\big((n+1)x\big) = f(nx) + f(x)$
- par récurrence, elle est donc vraie pour tout $t \in \mathbb{N}$,

- de $f(-tx) = -f(tx)$, on déduit alors qu'elle est vraie pour tout $t \in \mathbb{Z}$, et ceci quel que soit $x \in E$,

- enfin tout $t \in \mathbb{Q}$ s'écrit $t = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et, avec $px = qtx$,

puisque $(\mathcal{P})$ est vraie sur $\mathbb{Z}$, il vient $pf(x) = qf(tx)$ et donc $f(tx) = \dfrac{p}{q}f(x)$,
c'est-à-dire $f(tx) = tf(x)$ ou encore $g(t) = h(t)$.

En conséquence les fonctions g et h sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$, puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ elles sont donc égales ce qui prouve que f est linéaire.

Commentaires

Car $f(x+h) - f(x) = f(h) - f(0_E)$.

C'est une composée de fonctions continues : $t \mapsto tx$ et f.

$f(0_E) = 0_F$ est une conséquence de $f(y) = f(y + 0_E) = f(y) + f(0_E)$, c'est une propriété des morphismes de groupes additifs.

$f(-y) = -f(y)$ est aussi une propriété des morphismes de groupes additifs : $0_F = f(y - y) = f(y) + f(-y)$.

IV. Compacité

Ex. 5

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1,0)$, $B(2,0)$ et $C(0,3)$. Montrer qu'il existe au moins une droite D telle que $d(A,D)^2 + d(B,D)^2 + d(C,D)^2$ soit minimal.

Indications

Définir D par une équation normale.

Solution

D étant définie par l'équation normale :
$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$, $(\theta, p) \in [0, 2\pi] \times [0, +\infty[$, on obtient
$d(A,D)^2 + d(B,D)^2 + d(C,D)^2 =$
$$5 + 4\sin^2\theta + 3p^2 - 6p(\cos\theta + \sin\theta).$$
On est ainsi ramené à montrer que la fonction
$f : [0, 2\pi] \times [0, +\infty[$, $(\theta, p) \mapsto 5 + 4\sin^2\theta + 3p^2 - 6p(\cos\theta + \sin\theta)$,
atteint sa borne inférieure.

On dispose de la minoration $f(\theta, p) \geqslant 5 + 3p^2 - 12p$,
d'où, pour $p \geqslant 5$, $f(\theta, p) \geqslant 5 + 3p(p-4) \geqslant 5 + 3p \geqslant 20$.
Ainsi puisque $f(0,0) = 5$, on a $\inf\limits_{[0,2\pi]\times[0,+\infty[} f(\theta, p) = \inf\limits_{[0,2\pi]\times[0,5]} f(\theta, p)$
et, la fonction f étant évidemment continue, elle atteint sa borne inférieure sur le compact $[0, 2\pi] \times [0, 5]$.

Commentaires

Pour tout point $M(x_0, y_0)$, on a
$d(M,D)^2 = (x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - p)^2$.

f est bornée inférieurement puisqu'elle est à valeurs positives.

V. Applications linéaires continues

Ex. 6

Dans $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ on considère les normes :
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$
et on note $E_\infty = (E, \|\cdot\|_\infty)$ et $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$.
Soit φ l'endomorphisme de E défini par :
$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ \varphi(f)(x) = \int_0^x t\,f(t)\mathrm{d}t,$$
vérifier la continuité et calculer la norme des applications linéaires :
$$\varphi_a : E_\infty \to E_\infty,\ f \mapsto \varphi(f) \quad , \quad \varphi_b : E_\infty \to E_1,\ f \mapsto \varphi(f) \quad , \quad \varphi_c : E_1 \to E_\infty,\ f \mapsto \varphi(f).$$

Indications

Pour φ_a et φ_b, il existe des fonctions f et g de S_∞, sphère unité de E_∞, telles que :
$$\|\varphi_a(f)\|_\infty = |||\varphi_a||| \quad \text{et} \quad \|\varphi_b(g)\|_1 = |||\varphi_b|||.$$
Pour φ_c, trouver une suite (f_n) de S_1, sphère unité de E_1, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_c(f_n)\|_\infty = |||\varphi_c|||$.

Solution

La linéarité de l'intégrale fait de φ un endomorphisme de E.

- Étude de $\varphi_a \in \mathscr{L}(E_\infty)$.

Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on a la majoration :

$$|\varphi_a(f)(x)| \leqslant \int_0^x t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

d'où $\|\varphi_a(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty$. Donc φ_a est continue et $|||\,\varphi_a\,||| \leqslant \frac{1}{2}$.

Pour $f = 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\varphi_a(f)(x) = \displaystyle\int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$

donc $\|\varphi_a(f)\|_\infty = \frac{1}{2}$ et, en conclusion : $|||\,\varphi_a\,||| = \frac{1}{2}$.

- Étude de $\varphi_b \in \mathscr{L}(E_\infty, E_1)$.

Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|\varphi_b(f)(x)| \leqslant \int_0^x t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \int_0^x t\mathrm{d}t = \|f\|_\infty \frac{x^2}{2}$$

d'où $\displaystyle\int_0^1 |\varphi_b(f)(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\|f\|_\infty$.

Donc φ_b est continue et $|||\,\varphi_b\,||| \leqslant \frac{1}{6}$.

Comme $f = 1$ donne l'égalité $\|\varphi_b(f)\|_1 = \frac{1}{6}$, on en déduit $|||\,\varphi_b\,||| = \frac{1}{6}$.

- Étude de $\varphi_c \in \mathscr{L}(E_1, E_\infty)$.

Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|\varphi_c(f)(x)| \leqslant \int_0^1 t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1$$

Donc $\|\varphi_c(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$, et φ_c est continue avec $|||\,\varphi_c\,||| \leqslant 1$.

L'égalité n'aura pas lieu à cause de la majoration $\leqslant$, car la différence $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ n'est nulle que si f est nulle.

Il convient de choisir une suite de fonctions adéquate, par exemple,

$$f_n(t) = n\,t^{n-1}.$$

Alors $\varphi_c(f_n)(x) = \displaystyle\int_0^x n t^n \mathrm{d}t = \frac{nx^{n+1}}{n+1}$, $\|f_n\|_1 = 1$ et $\|\varphi_c(f_n)\|_\infty = \dfrac{n}{n+1}$.

Comme $\|f_n\|_1 = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_c(f_n)\|_\infty = 1$,

on a $\displaystyle\sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} \|\varphi_c(f)\|_\infty \geqslant 1$, et on peut conclure que $|||\,\varphi_c\,||| = 1$.

Commentaires

L'objectif est d'obtenir une majoration de $\|\varphi_a(f)\|_\infty$ de la forme $k_1\|f\|_\infty$.

$\frac{1}{2}$ est le plus grand élément de l'ensemble décrit par $\frac{\|\varphi_a(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$.

L'objectif est ici d'obtenir une majoration de $\|\varphi_b(f)\|_1$ de la forme $k_2\|f\|_\infty$.

On recherche une majoration de $\|\varphi_c(f)\|_\infty$ par $k_3\|f\|_1$.

Dans ce troisième cas, la borne supérieure n'est pas atteinte.

Ex. 7

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ donnée dans des bases $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ par la matrice :

$$A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

E et E' étant normés par :

$$\| x \|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad \text{et} \quad \| x' \|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^{p} x'_i e'_i \right\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant p} |x'_i|$$

exprimer la norme de f à l'aide des coefficients de la matrice A.

Solution

Par définition de A, on a $\quad \forall j \in [\![1, n]\!], \; f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_{ij} e'_i$

et $\quad f(x) = f\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right) e'_i$

Notons $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x'_i e'_i \quad$ avec $\quad x'_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$.

Posons $\quad M = \displaystyle\sup_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |A_{ij}|$, il vient :

pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\quad |x'_i| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \; |x_j| \leqslant M \| x \|_1$,

donc $\quad \| f(x) \|_\infty \leqslant M \| x \|_1$.

On en déduit $\quad ||| f ||| \leqslant M$.

Il existe au moins un couple (k, h) d'entiers tel que $|A_{kh}| = M$. Alors $\| f(e_h) \|_\infty = M \| e_h \|_1$.

Conclusion : $\quad ||| f ||| = M = \displaystyle\sup_{i,j} |A_{ij}|$.

Commentaires

L'espace E est de dimension finie, donc f est continue.

On recherche une majoration de $\| f(x) \|_\infty$ de la forme $M \| x \|_1$.

Ex. 8

Montrer que, quelle que soit la norme $\| \cdot \|$ choisie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, il existe un réel μ tel que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2, \quad \| AB \| \leqslant \mu \, \| A \| \, \| B \|.$$

Solution

Dans la mesure où A représente un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$, par définition :

$$\| A \| = \sup_{X \in \mathbb{K}^p \setminus \{0\}} \frac{\| AX \|}{\| X \|}$$

et pour tout couple (A, B), on a : $\quad \| AB \| \leqslant \| A \| \, \| B \|$

Prenons une autre norme $\| \cdot \|'$ de $\mathbb{K}^p$, elle est équivalente à la précédente : il existe α et $\beta > 0$ tels que $\quad \alpha \| \cdot \| \leqslant \| \cdot \|' \leqslant \beta \| \cdot \| \quad$ ce qui permet de faire les majorations successives :

$$\| AB \|' \leqslant \beta \| AB \| \leqslant \beta \| A \| \, \| B \| \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2} \| A \|' \| B \|'.$$

Avec $\quad \mu = \dfrac{\beta}{\alpha^2} \quad$ c'est l'inégalité souhaitée $\quad \| AB \|' \leqslant \mu \| A \|' \| B \|'$.

Commentaires

On note encore A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à la matrice A.

D'après le théorème 7 (composition d'applications linéaires continues).

La norme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ainsi associée à la norme $\| \cdot \|_\infty$ de $\mathbb{K}^p$ est $\| A \| = \displaystyle\sup_{1\leqslant i\leqslant p} \sum_{j=1}^{p} |A_{ij}|$.

CHAPITRE 2

Séries réelles ou complexes

A. Généralités

(1) $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou le corps des complexes.

1. Espace vectoriel des séries réelles ou complexes (1)

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On appelle **série de terme général** u_n le couple de suites : $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$

La suite $(U_n)_{\mathbb{N}}$ de terme général $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est dite suite des **sommes partielles** de la série de terme général u_n. (2)

(2) Une série à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$) sera dite réelle (resp. complexe).

Notation 1

La série de terme général u_n sera notée $\sum u_n$.
On note $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ l'ensemble des séries à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Propriété 1

Définition d'une série par la suite des sommes partielles (3)
Toute suite (U_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n définie par : $u_0 = U_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = U_n - U_{n-1}$.

(3) Bien qu'immédiat, ce résultat est important : il montre que toute étude de suite peut être ramenée à une étude de série.

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$.
La série $\sum u'_n$ où $(u'_n)_{\mathbb{N}}$ est définie par $u'_0 = u'_1 = \cdots = u'_{n_0-1} = 0$, et $u'_n = u_n$ pour $n \geqslant n_0$, est encore appelée série de terme général u_n et notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$. (4)

Pour la suite $(U'_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant n_0 \Rightarrow U'_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

(4) L'intérêt de cette définition réside en ce qu'elle uniformise la notion de série : dans les développements ultérieurs, on n'aura pas à considérer le cas particulier des séries définies à partir d'un certain rang.

Définition 3

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$, la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ (qui est du type défini en définition 2) est dite déduite de $\sum u_n$ par **troncature** au rang n_0.
Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U'_n)_{n\geqslant n_0}$ sont les suites des sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ respectivement, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant n_0 \Rightarrow U'_n = U_n - U_{n_0-1}$ (5)

(5) Remarquons tout de suite que les suites $(U_n)_{n\geqslant 0}$ et $(U'_n)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature.

Théorème 1

L'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ des séries à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$\mathcal{S}(\mathbb{K})$ est une partie non vide de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Soit $\left((u_n)_{\mathbb{N}}, (U_n)_{\mathbb{N}}\right)$ et $\left((v_n)_{\mathbb{N}}, (V_n)_{\mathbb{N}}\right)$ des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ donne $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda U_n + \mu V_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda u_k + \mu v_k$
ce qui prouve que $\left((\lambda u_n + \mu v_n)_{\mathbb{N}}, (\lambda U_n + \mu V_n)_{\mathbb{N}}\right)$ est une série c'est-à-dire aussi que :

$$\lambda\left((u_n)_{\mathbb{N}}, (U_n)_{\mathbb{N}}\right) + \mu\left((v_n)_{\mathbb{N}}, (V_n)_{\mathbb{N}}\right)_{\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{K}).$$

Ainsi $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2. Séries convergentes

Définition 4

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **convergente** si et seulement si la suite $(U_n)_{n}$ de ses sommes partielles est convergente.

Une série non convergente est dite **divergente**.

Deux séries sont **de même nature** lorsqu'elles sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes.

(6) Dans le cas d'une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ convergente, la somme est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et on a : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

Définition 5

La somme d'une série convergente $\sum u_n$ est l'élément de $\mathbb{K}$ noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et défini par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \,. \text{ (6)}$$

(7) Toute étude de suite peut donc se ramener une étude de série.

Théorème 2

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente si et seulement si la série de terme général $v_n - v_{n-1}$, $n \geq 1$, est convergente. (7)

Pour $n \geq 1$, posons $u_n = v_n - v_{n-1}$, il vient : $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k - v_{k-1} = v_n - v_0$

donc les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont de même nature.

Propriété 2

Une série $\sum u_n$ à termes complexes est convergente si et seulement si la série des parties réelles $\sum a_n$ et la série des parties imaginaires $\sum b_n$ sont convergentes.

Alors, avec $u_n = a_n + ib_n, (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + ib_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

(8) Dans les deux cas, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ u_n = u'_n$. Donc les suites $(U_n)_{n\geq n_0}$ et $(U'_n)_{n\geq n_0}$ diffèrent d'une constante.

Propriété 3

a) $\sum u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$ et une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ obtenue par troncature sont de même nature.

b) Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, elles sont de même nature. (8)

La nature d'une série $\sum u_n$ ne dépend donc que du comportement de u_n **pour n assez grand**, on dit que c'est une **notion asymptotique**.

2.1 – Reste d'une série convergente

(9) Dans le cas d'une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ définie à partir du rang n_0, cette relation devient : $\forall p \geq n_0,\ \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = U_p + R_p$ avec $U_p = \sum_{n=n_0}^{p} u_n$.

Définition 6

Étant donnée une série convergente $\sum u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$ et p un entier naturel. On appelle **reste d'ordre** p de cette série et on note R_p la somme de la série $\sum_{n\geq p+1} u_n$: $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$.

On a alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = U_p + R_p \quad \left(U_p = \sum_{n=0}^{p} u_n\right)$. (9)

Remarque

On pourra aussi rencontrer les notations :

$$U_p = \sum_{n=n_0}^{p-1} u_n \quad \text{ou} \quad R_p = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n.$$

Propriété 4

Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n d'une série convergente $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$.

a) Pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = R_{n-1} - R_n$.

b) $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$.

2.2 – Condition nécessaire de convergence

Théorème 3

Pour qu'une série $\sum u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$ soit convergente, il est nécessaire que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant N \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

La suite $(U_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers $\ell \in \mathbb{K}$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \; n > N \Rightarrow |U_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avec $\sum_{k=n}^{n+p} u_k = U_{n+p} - U_{n-1} = U_{n+p} - \ell - (U_{n-1} - \ell)$, il vient : $n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$.

Application

La série harmonique $\left(u_n = \frac{1}{n}, n \geqslant 1\right)$ diverge. En effet :

$$U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{donc} \quad U_{2n} - U_n \geqslant n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

Théorème 4

Si une série $\sum u_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est convergente, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. [10]

Il suffit de remarquer que $u_n = U_n - U_{n-1}$ avec $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} U_{n-1}$. [11]

[10] L'exemple de la série harmonique montre que cette condition **nécessaire** de convergence **n'est pas suffisante**.

[11] On peut aussi appliquer le théorème 3 avec $p=0$.

Application pratique

On utilise ce théorème pour mettre en évidence des divergences, par exemple : $u_n = a^n$, $a \in \mathbb{C}$, pour $|a| \geqslant 1$, u_n ne tend pas vers zéro, donc $\sum u_n$ diverge.

Définition 7

Une série dont le terme général ne tend pas vers zéro sera dite **grossièrement divergente**.

2.3 – Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème 5

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour que $\sum u_n$ converge, il faut et il suffit qu'elle vérifie le **critère de Cauchy**, qui se traduit par l'une ou l'autre des formulations équivalentes suivantes :

(1) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant N \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$

(2) $\lim_{n \to +\infty} \sup_{p \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| = 0$ (ou $\lim_{n \to +\infty} \sup_{p \geqslant n} \left| \sum_{k=n}^{p} u_k \right| = 0$)

☞ La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est de Cauchy, c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |U_{n+p} - U_{n-1}| < \varepsilon.$$

On obtient ainsi la formulation (1).

L'équivalence entre (1) et (2) est claire dès que l'on note que $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_n\right| < \varepsilon$ pour tout $p \in \mathbb{N}$,

donne l'existence (dans $\mathbb{R}$) de $\quad S_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right|$ avec $0 \leqslant S_n \leqslant \varepsilon$.

Conséquence pratique

Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ converge par application du critère de Cauchy, on s'efforcera de majorer $\left|\sum_{k=n}^{p} u_k\right|$ indépendamment de p ($p \geqslant n$) par une suite de limite nulle.

2.4 – Séries absolument convergentes

Définition 8

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **absolument convergente** si et seulement si la série $\sum |u_n| \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est convergente.

Théorème 6

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour que $\sum u_n$ soit convergente, il **suffit** ✎(12) que $\sum u_n$ soit absolument convergente.

✎(12) Mais ce n'est pas nécessaire.

☞ Si $\sum u_n$ est absolument convergente, $\sum |u_n|$ vérifie le critère de Cauchy.

Or on a $\quad \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|, \quad$ donc $\sum u_n$ vérifie aussi le critère de Cauchy,

et il s'ensuit que $\sum u_n$ est convergente (d'après le théorème 5).

Il existe des séries réelles qui sont convergentes et non absolument convergentes.

Un exemple est celui de la **série harmonique alternée** $\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

On sait que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge et on verra plus loin (exemple 2) que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

Définition 9

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **semi-convergente** si et seulement si elle est convergente mais non absolument convergente.

3. Suites et séries

On peut, dans certains cas, conclure à la nature d'une série $\sum u_n$ en étudiant directement la suite (U_n) de ses sommes partielles. Pratiquement, ceci sera possible lorsqu'on pourra donner de $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ une expression simple en fonction de n.

Exemple 1 La série géométrique $\quad \sum_{n\geqslant 0} a^n, \quad a \in \mathbb{C}$, (par convention $\forall a \in \mathbb{C}, a^0 = 1$).

- Si $a \neq 1 \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$.

- Pour $|a| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{1}{1-a}$.

  La série géométrique est alors convergente avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.
- Pour $|a| \geqslant 1$, a^n ne tend pas vers zéro, donc $\sum a^n$ est grossièrement divergente.

Formulaire 1

La série géométrique $\sum a^n \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ converge si et seulement si $|a| < 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Exemple 2 La série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Sachant que $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$, $(k \in \mathbb{N}^*)$, ✎[13] il vient :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$ et $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$. D'où $|U_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Ce qui montre que la série harmonique alternée est convergente, de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{n \to +\infty} U_n = \ln 2$$

✎[13] Ce qui paraît être ici une «astuce» est en fait une méthode liée aux séries entières (voir le chapitre 5).

Exemple 3 Série $\sum u_n$ dont le terme général s'écrit $u_n = h_{n+1} - h_n$.

D'après le théorème 2, la suite (h_n) et la série $\sum u_n$ sont de même nature et, dans le cas de la convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (h_{n+1} - h_n) = -h_0 + \lim_{n \to +\infty} h_n \quad ✎[14]$$

- Application. Étude de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2+n+1}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan} n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{Arctan}(n+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

La série proposée converge donc, avec : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2}$

✎[14] Il suffit de remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = h_{n+1} - h_0$.
On dit parfois que la simplification de la somme est due à un **téléscopage** ou encore que la série est **télescopique**.

4. Opérations sur les séries

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à valeurs dans $\mathbb{K}$ et λ un scalaire ($\lambda \in \mathbb{K}$).

- Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \lambda u_n$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge. ✎[15]

✎[15] Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire a priori de $\sum(u_n+v_n)$.

5. Groupement de termes [16]

[16] Ce paragraphe n'est traité qu'à titre de complément.

Définition 10

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$, et φ une application **strictement croissante** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\varphi(0) = 0$.

La série de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$ est dite déduite de $\sum u_n$ par **groupement des termes** ou par **sommation par tranches** (définies au moyen de la fonction φ). [17]

[17] **Exemple**
$\varphi : n \mapsto 2n, v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.
$\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas nécessairement de même nature : par exemple, pour $u_n = (-1)^n$ et $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$, $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge (série nulle).

Théorème 7

a) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. [18]

b) Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge.

[18] On conserve les notations de la définition 10.

a) Cette proposition résulte de ce que (V_n), suite des sommes partielles de $\sum v_n$, est extraite de (U_n), suite des sommes partielles de $\sum u_n$. [19]

b) C'est la contraposée de la proposition a).

[19]
$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{\varphi(n+1)-1} u_k = U_{\varphi(n+1)-1}$$

Théorème 8

Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et s'il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) - \varphi(n) \leqslant M$,
alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

a) D'après le théorème 7, on a déjà : $\left(\sum u_n \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\sum v_n \text{ converge}\right)$

b) • Montrons maintenant : $\left(\sum v_n \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\sum u_n \text{ converge}\right)$

Lemme : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathbb{N}$, unique, tel que $\varphi(p_n) \leqslant n < \varphi(p_n + 1)$

De plus, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

• Si p_n existe, on a $p_n = \max\{p \in \mathbb{N}, \varphi(p) \leqslant n\}$, d'où l'unicité.

• Notons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(k) \geqslant k$. Il en résulte que le sous-ensemble de $\mathbb{N}$, $\{p \in \mathbb{N}, \varphi(p) \leqslant n\}$ est majoré par n, comme il est non vide (il contient 0), il admet un plus grand élément, ce qui assure l'existence de p_n.

• En écrivant $\varphi(p) = \varphi(p) - \varphi(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \left[\varphi(k) - \varphi(k-1)\right] \leqslant pM$, on obtient :

$$n < \varphi(p_n + 1) \leqslant (p_n + 1)M \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty.$$

Démonstration de b)

Formons $|V_{p_n} - U_n| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\varphi(p_n+1)-1} u_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\varphi(p_n+1)-1} |u_k|$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n = \sup\limits_{p \geqslant n} |u_p|$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.$$

En remarquant que $\varphi(p_n + 1) - 1 - n \leqslant M$, on obtient $|V_{p_n} - U_n| \leqslant M\alpha_n$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n - V_{p_n} = 0$$

Par ailleurs, en posant $V = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = V$, donc, puisque (d'après le lemme) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$, il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_{p_n} = V$, et, finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = V$.

Exemple 4 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, $n \geqslant 2$. [20] $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$, avec :

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{-1}{2n(2n+1)}$$

[20] Dans chacun de ces deux exemples, $\sum v_n$ pourra être étudiée au moyen de la règle des équivalents car v_n est de signe constant (cf. section 8).

Exemple 5 $u_n = \dfrac{\cos\left(2n\frac{\pi}{3}\right)}{n}$, $n \geqslant 1$.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$, avec : $v_n = u_{3n+1} + u_{3n+2} + u_{3n+3}$

$$v_n = \frac{-1}{2(3n+1)} - \frac{1}{2(3n+2)} + \frac{1}{3n+3} = \frac{-9n-5}{2(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

6. Modification de l'ordre des termes [21]

[21] Paragraphe traité à titre de complément.

Définition 11

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$ et σ une permutation de $\mathbb{N}$, la série $\sum v_n$ de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ est dite déduite de $\sum u_n$ par **modificaton de l'ordre des termes** ou par **réarrangement** (associé à la permutation de σ).

Remarques

1) **Un réarrangement peut modifier la nature d'une série.**

Considérons, par exemple, la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. [22]

[22] On a vu à l'occasion de l'exemple 2 qu'il s'agit d'une série convergente.

On peut réarranger $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en une suite $(u'_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\sum u'_n$ puisse, par un regroupement de termes, donner une série $\sum v_n$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > \dfrac{1}{n+1}$.

Il suffit en effet de définir (u'_n) de façon à pouvoir poser :

$$v_0 = 1, \quad v_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{15} > \frac{1}{2}, \quad v_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{51} > \frac{1}{3},$$

$$\cdots\ v_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2p_n+1} + \cdots + \frac{1}{2p_{n+1}-1} > \frac{1}{n+1}\ \cdots$$

(L'existence de p_{n+1} est assurée par le fait que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant p_n} \frac{1}{2k+1}$ est divergente.)

Par construction $\sum v_n$ est divergente car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, [23] donc, d'après le théorème 7, $\sum u'_n$ est également divergente.

[23] et on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=+\infty$.

Par modification de l'ordre des termes, on a ainsi transformé une série convergente en une série divergente.

2) **Un réarrangement peut, sans changer la nature, modifier la somme d'une série.**

Considérons toujours la série harmonique alternée $\sum u_n$ transformée par la modification de l'ordre des termes en :

$$\sum_{n\geqslant 1} u'_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n+1} - \cdots$$

D'après le théorème 8, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u'_n$ est de même nature et a éventuellement même somme que :

$$\sum_{n\geqslant 1} v_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{4n} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) + \cdots$$

Or, on constate que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

En conséquence, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ et, donc, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u'_n$ sont convergentes, de somme $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Le réarrangement «a divisé la somme par 2» !

Définition 12

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans E est dite **commutativement convergente** lorsqu'elle est convergente et que toute série $\sum v_n$ qui s'en déduit par modification de l'ordre des termes est convergente, de même somme. (24)

(24) Des exemples nous seront fournis par les séries à termes réels positifs et les séries absolument convergentes.

B. Séries à termes réels positifs

Remarques préliminaires (25)

(25) Certains résultats de cette section font appel à la notion de fonction intégrable sur un intervalle quelconque qui sera développée dans le chapitre 6.

- On ne change pas la **nature** d'une série lorsque l'on modifie un nombre fini de termes. Les résultats qui suivent concernant la nature des séries à termes positifs sont donc valables pour les **séries à termes positifs réels à partir d'un certain rang.**

- Si $\sum u_n$ est à termes réels négatifs, à partir d'un certain rang, $\sum -u_n$ est de même nature et à termes réels positifs à partir d'un certain rang. Le présent paragraphe permet donc d'étudier les **séries réelles de signe constant à partir d'un certain rang.**

1. Théorème fondamental – Conséquences

Théorème 9

Pour qu'une série $\sum u_n$ à termes réels positifs soit convergente, il faut et il suffit que la suite $(U_n)_{\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles soit majorée.

Dans ces conditions, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. (26)

(26) Dans le cas de la divergence $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Il suffit de remarquer que $(U_n)_{\mathbb{N}}$ est, dans ce cas, une suite croissante.

On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leqslant U$ avec $\displaystyle U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Corollaire

Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs et une série $\sum v_n$ s'en déduisant par sommation par tranches sont de même nature. (27)

(27) Soit $(U_n)_{\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{\mathbb{N}}$ les suites de sommes partielles.
Si $\sum u_n$ converge, on sait que $\sum v_n$ converge et les sommes sont égales (cf. théorème 7).
Si $\sum u_n$ diverge, on a $\displaystyle\lim_{+\infty} U_n = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{+\infty} V_n = +\infty$, car $(V_n)_{\mathbb{N}}$ est extraite de $(U_n)_{\mathbb{N}}$.

Théorème 10

Comparaison d'une série et d'une intégrale

Soit f une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, $(a \in \mathbb{R}_+)$, continue par morceaux, **positive et décroissante.**

a) La série $\sum w_n$, avec $\displaystyle w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$, $(n \geqslant a+1)$, est convergente.

b) La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$. (28)

(28) Dans la pratique, ce résultat permettra de ramener l'étude de la nature d'une série à celle d'une intégrabilité.

a) w_n n'a de sens que pour $n \geqslant n_0 + 1$, où n_0 est le plus petit entier naturel tel que $n_0 \geqslant a$.
Puisque f est positive décroissante, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on a :

$$0 \leqslant w_n \leqslant f(n-1) - f(n) \text{ donc } W_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} w_k \leqslant f(n_0) - f(n) \leqslant f(n_0)$$

La série $\sum w_n$ à termes réels positifs est donc convergente d'après le théorème 9.

b) Posons $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, $(n \geqslant n_0)$; avec la relation de Chasles on obtient :

$$W_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) = \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t - U_n + f(n_0)$$

donc, puisque $\lim_{n\to+\infty} W_n$ existe (d'après a)), les suites (U_n) et (I_n) avec $I_n = \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.
La fonction f étant positive, on sait qu'elle est intégrable sur $[n_0, +\infty[$ si et seulement si la suite de terme général $I_n = \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente [29] donc si et seulement si la série $\sum f(n)$ est convergente.

[29] Voir le chapitre 6.

Application

- **Série de Riemann :** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$

  Si $\alpha \leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.

  Si $\alpha > 0$, par application du théorème 10, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc si et seulement si $\alpha > 1$.

Formulaire 2

$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ **converge si et seulement si** $\alpha > 1$

- **La constante d'Euler**

  Il existe un réel γ appelé constante d'Euler tel que lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ell n\, n + \gamma + o(1) \text{ [30]}$$

[30] **Remarque**
Ce nombre a été étudié en Analyse PCSI ou MPSI. Euler en a fourni les 16 premières décimales en 1781.
À 5.10^{-5} près, on a :
$\gamma \approx 0{,}5772$
et plus précisément :
$0{,}57\,721 < \gamma < 0{,}57\,722$

Il suffit d'appliquer le théorème 10 avec $f : t \mapsto \frac{1}{t}$.

La série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n}$ $(n \geqslant 2)$ est convergente d'où l'existence d'un réel ℓ tel que : $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} w_k = \lim_{n\to+\infty} \left(\ell n\, n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right)$.

On obtient le résultat annoncé avec $\gamma = 1 - \ell$.

- **Série de Bertrand :** $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ell n\, n)^\beta}$ $(\beta \in \mathbb{R})$.

  Soit $a = \sup(2, e^{-\beta})$. $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ell n\, x)^\beta}$ est positive, décroissante sur $[a, +\infty[$.

Ainsi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\ell n\, n)^\beta}$ est convergente si et seulement si $x \mapsto \frac{1}{x(\ell n\, x)^\beta}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ donc aussi si et seulement si $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ est intégrable sur $[\ell n\, a, +\infty[$. [31]

[31] Utiliser le changement de variable défini par $t = \ell n\, x$ (cf. chapitre 6).

Formulaire 3

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ell n\, n)^\beta}$ **converge si et seulement si** $\beta > 1$.

2. Premier théorème de comparaison

Théorème 11

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes réels positifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :

a) pour que $\sum u_n$ converge, il suffit que $\sum v_n$ converge, et, dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

b) pour que $\sum v_n$ diverge, il suffit que $\sum u_n$ diverge.

Notons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq U_n \leq V_n$.

a) La proposition a) est alors conséquence immédiate du théorème **9**, et par passage à la limite, l'inégalité $0 \leq \sum_{k=n}^{p} u_k \leq \sum_{k=n}^{p} v_k$ donne $0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

b) D'autre part, si $\sum u_n$ diverge, on a $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, donc, de $U_n \leq V_n$, on déduit $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ et $\sum v_n$ diverge : c'est la proposition b).

Applications

Règle 1

Critère de domination

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs au voisinage de $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$ (resp. $u_n = \mathcal{O}(v_n)$) quand $n \to +\infty$. Dans ce cas :

- si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
- si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Dans les deux cas, il existe $a > 0$ et un rang n_0 tels que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq a v_n$. Il suffit alors d'appliquer le théorème **11** aux séries tronquées $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$.

(32) **Remarque**

Les conditions $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ se traduisent respectivement par $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ et $(n^\alpha u_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée d'où le nom de la règle.

Règle 2

Critère de Riemann ou règle $n^\alpha u_n$ (32)

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

a) Pour que $\sum u_n$ converge, il **suffit** qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad \text{resp. } u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty$$

b) Pour que $\sum u_n$ diverge, il **suffit** qu'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que :

$$\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n) \qquad \text{resp. } \frac{1}{n^\alpha} = O(u_n) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty$$

On applique le critère de domination sachant que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$ et diverge lorsque $\alpha \leqslant 1$.

Exemple. Les séries de Bertrand : $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- Le cas $\alpha = 1$ a été étudié précédemment.

Noter, que pour $\beta \leqslant 0$, l'inégalité $\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$ peut être utilisée.

- Cas $\alpha > 1$: considérons γ réel tel que $1 < \gamma < \alpha$.

On a $n^\gamma u_n = n^{\gamma-\alpha}(\ln n)^{-\beta}$, et, puisque $\gamma - \alpha < 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \text{ (33)}$$

(33) Noter que ceci est vrai quel que soit β.

D'après la règle de Riemann, $\sum u_n$ est convergente.

- Cas $\alpha < 1$: on a ici $nu_n = n^{1-\alpha}(\ln n)^{-\beta}$, et, puisque $1 - \alpha > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{n} = o(u_n) \text{ (34)}$$

(34) De nouveau quel que soit β.

D'après la règle de Riemann, $\sum u_n$ est divergente.

Formulaire 4

$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Règle 3

Règle des équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles telles que, au voisinage de $+\infty$, $v_n \geqslant 0$ **et** $u_n \sim v_n$.

Alors, on a également $u_n \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$ et les deux séries sont de même nature.

On a, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n - v_n = o(v_n)$ et $v_n \geqslant 0$.

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2} v_n$

donc $u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n$ et $v_n \leqslant 2u_n$. (35) On conclut avec le théorème **11**.

(35) Remarquer que $v_n \leqslant 2u_n$ donne $u_n \geqslant 0$.

Remarque

Cette règle s'applique aux séries de signe constant à partir d'un certain rang, mais elle est en défaut si les séries comparées ne sont pas de signe constant au voisinage de $+\infty$, (voir Mise en œuvre, Ex. 8).

__Application.__ **Étude pratique d'une série $\sum u_n$.**

On s'intéresse à des séries de signe constant à partir d'un certain rang.

Dans de nombreux cas, on pourra :

1) déterminer une série $\sum v_n$ telle que $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$, donc de même nature que $\sum u_n$;

2) puis conclure à la nature de $\sum v_n$ soit directement soit avec la règle de Riemann. (36)

(36) Il est clair qu'il faudra s'efforcer de trouver v_n la plus simple possible.

Exemple 6 Étude de la série de terme général $u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$, $(a \in \mathbb{R})$.

En développant u_n on obtient : $u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Si $a \neq \frac{9}{2}$, $u_n \sim \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n}$ et $\sum u_n$ diverge d'après la règle des équivalents.

Si $a = \frac{9}{2}$, $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\sum u_n$ converge d'après la règle $n^\alpha u_n$.

Exemple 7 Étude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\left[(n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right]$.

$(n+1)^{1+\frac{1}{n}} = n^{1+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} = n\, e^{\frac{\ell n\, n}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Or $\left(1+\frac{1}{n}\right)\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{\ell n\, n}{n}\right)$ ✎[37]

Donc $(n+1)^{1+\frac{1}{n}} = n\, e^{\frac{\ell n\, n}{n} + o\left(\frac{\ell n\, n}{n}\right)} = n\left(1 + \frac{\ell n\, n}{n} + o\left(\frac{\ell n\, n}{n}\right)\right) = n + \ell n\, n + o(\ell n\, n)$.

De même $(n-1)^{1-\frac{1}{n}} = n\, e^{-\frac{\ell n\, n}{n} + o\left(\frac{\ell n\, n}{n}\right)} = n - \ell n\, n + o(\ell n\, n)$.

Finalement $(n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}} = 2\,\ell n\, n + o(\ell n\, n)$ et $u_n \sim 2\frac{\ell n\, n}{n^\alpha}$.

D'après l'étude des séries de Bertrand, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. ✎[38]

✎[37] Le terme prépondérant en exposant est donc $\frac{\ell n\, n}{n}$.

✎[38] Les séries de Bertrand ne font pas partie des séries de référence admises par le programme. Il faudra donc, dans une telle situation, être en mesure de conclure avec la règle de Riemann.

Théorème 12

La formule de Stirling ✎[39]

Lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

✎[39] La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

- Montrons d'abord un résultat utile sur les intégrales de Wallis.

Lemme : Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

☞ Pour $n \geq 2$, une intégration par parties donne : $n W_n = (n-1)W_{n-2}$ **(1)**. ✎[40]

On en déduit pour tout $n \geq 2$: $n\, W_n W_{n-1} = (n-1)\, W_{n-1} W_{n-2}$,

c'est-à-dire que la suite de terme général $n\, W_n W_{n-1}$, $n \geq 1$, est constante ; il vient donc :

$$\forall n \geq 1, \quad n\, W_n W_{n-1} = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$$

La fonction $\sin$ est continue, positive, non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n > 0$$

D'autre part, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \in [0,1]$ donc $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$ et $W_{n+1} \leq W_n$: la suite $(W_n)_\mathbb{N}$ est décroissante et il en résulte pour tout $n \geq 2$: $0 < W_n \leq W_{n-1} \leq W_{n-2}$

d'où encore $1 \leq \frac{W_{n-1}}{W_n} \leq \frac{W_{n-2}}{W_n}$ **(2)**

La relation de récurrence (1) donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n-2}}{W_n} = 1$

donc, avec l'inégalité (2), il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n-1}}{W_n} = 1$ ✎[41] c'est-à-dire $W_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} W_n$

✎[40] $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx$
$= \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$
$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx$
$= (n-1)(W_{n-2} - W_n)$

✎[41] Théorème d'encadrement.

d'où enfin $\frac{\pi}{2} = n\, W_n W_{n-1} \sim n\, W_n^2$. La conclusion en résulte : $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

- Démontrons maintenant la formule de Stirling.

Considérons la suite de terme général $u_n = \ln\left(n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^n\right)$. (42)

(42) Il s'agit ici de prouver que la suite $n!n^{-n-1/2}e^n$ est convergente.

On sait que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est de même nature que la série de terme général :

$$v_n = u_n - u_{n-1} = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \quad (43)$$

(43) Voir théorème 2.

Un développement limité donne :

$$v_n = 1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \quad \text{donc} \quad v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence de la série $\sum v_n$ et de la suite (u_n).

On en déduit qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^n = \lambda$ (44)

(44) Avec $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, on a $\lambda = e^{\ell}$.

et ce résultat nous donne aussi $n! \sim \lambda\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$.

Reprenons alors l'intégrale de Wallis W_{2n} ; la relation de récurrence (1) s'écrit :

$$2n\, W_{2n} = (2n-1)W_{2n-2}$$

d'où : $$W_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} W_0 \quad \text{soit aussi} \quad W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2},$$

et avec l'équivalent précédent de $n!$ on obtient : $W_{2n} \sim \frac{\pi}{\lambda\sqrt{2n}}$.

Sachant, d'après le lemme, que $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$, il vient enfin :

$$\lambda = \sqrt{2\pi} \quad \text{et} \quad n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\,\pi\, n}$$

Exemple 8 Étudier suivant les valeurs des réels α et β la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\beta}\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2n+3}\right)^\alpha.$$

u_n s'exprime au moyen de la fonction factorielle : $u_n = \frac{1}{n^\beta(2n+3)^\alpha}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^\alpha$

La formule de Stirling donne :

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad \text{d'où} \quad u_n \sim \frac{\lambda}{n^{\beta+\frac{3\alpha}{2}}} \quad \text{avec} \quad \lambda = \pi^{\frac{\alpha}{2}}2^{-2\alpha}.$$

D'après la règle des équivalents, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\frac{3\alpha}{2} + \beta > 1$. (45)

(45) **Remarque** On peut aussi s'apercevoir que : $\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2n+1} = W_{2n+1}$ et conclure grâce à l'équivalent de l'intégrale de Wallis vu précédemment.

3. Théorème de comparaison logarithmique

Théorème 13

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n_0 \leqslant n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$

Alors :

a) pour que $\sum u_n$ converge, il suffit que $\sum v_n$ converge,

b) pour que $\sum v_n$ diverge, il suffit que $\sum u_n$ diverge,

c) dans le cas a), pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{u_n}{v_n}\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$.

- On a $\forall n > n_0,\ \dfrac{u_n}{u_{n_0}} = \prod_{k=n_0}^{n-1} \dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ donc $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$

et les propositions a) et b) résultent du théorème 11.

- Supposons $\sum v_n$ convergente.

On a, pour tout $k \geqslant n \geqslant n_0$, $u_k \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} v_k$ d'où $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{u_n}{v_n} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

Règle 4

Critère de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

a) S'il existe $k \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$,

alors $\sum u_n$ converge, et pour tout $n \geqslant n_0$ $\quad 0 \leqslant R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{k u_n}{1-k}$.

b) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$,

alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

c) S'il existe $\ell = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, alors :

- si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge,
- si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement,
- si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Introduisons la série géométrique de terme général $v_n = k^n$: $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = k$.

a) est conséquence immédiate du théorème 13,

b) résulte de ce que $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante, donc $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0} > 0$.

c) • Si $\ell < 1$, soit k tel que $\ell < k < 1$, puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, donc $\sum u_n$ converge d'après a).

• Si $\ell > 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement d'après b).

• Le cas $\ell = 1$ peut se produire aussi bien avec une série convergente $\sum \dfrac{1}{n^2}$ qu'avec une série divergente $\sum \dfrac{1}{n}$.

Exemple 9 Étudier les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = \dfrac{e^n n!}{n^n}$.

- $u_n = \dfrac{1}{n!}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ et $\sum u_n$ converge.
- $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = e\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = e\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e^{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

c'est-à-dire $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On se trouve dans le cas douteux : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, cependant, on a, au voisinage de $+\infty$,

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - 1 \sim \dfrac{1}{2n}$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} - 1 > 0$ et $\sum v_n$ diverge. (46)

(46) On peut aussi utiliser la formule de Stirling avec laquelle on obtient $v_n \sim \sqrt{2\pi n}$.

C. Séries absolument convergentes

1. Absolue convergence

1.1 – Méthodes d'étude

Pour étudier l'absolue convergence d'une série $\sum u_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on utilisera les critères développés dans l'étude des séries à termes réels positifs.

En particulier, s'il existe $\sum v_n$ à **termes réels positifs convergente** telle que $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$, $\sum u_n$ **est alors absolument convergente**.

1.2 – Propriétés générales

Théorème 14

Comparaison d'une série complexe à une intégrale [47]

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ de classe C^1 et telle que f' soit intégrable sur $[a, +\infty[$.

Alors la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ est absolument convergente.

[47] Ce résultat, donné à titre de complément, fait appel à la notion de fonction intégrable développée dans le chapitre 6. Si nécessaire, on pourra le réserver à une deuxième lecture.

w_n est définie pour $n \geqslant n_0$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ est tel que $n_0 \geqslant a+1$.

f étant de classe C^1, une intégration par parties donne :

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = nf(n) - (n-1)f(n-1) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)\mathrm{d}t$$

donc $\quad w_n = (n-1)\big(f(n) - f(n-1)\big) - \displaystyle\int_{n-1}^{n} tf'(t)\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} (n-1-t)f'(t)\mathrm{d}t.$

On en déduit $\quad |w_n| \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t$. Or, par définition, $\big|f'\big|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n} \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t$ existe, ce qui traduit que la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t$ est convergente, et la majoration précédente donne la convergence de $\sum |w_n|$.

Exemple 10 Étudier la nature de la série de terme général : $\quad u_n = \dfrac{\sin(\ln n)}{n} \quad n \geqslant 1.$

Soit $f \;:\; t \mapsto \dfrac{\sin(\ln t)}{t} \quad , \quad t \in [1, +\infty[$.

f est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ avec $f'(t) = \dfrac{\cos(\ln t) - \sin(\ln t)}{t^2}$.

On a $\quad \big|f'(t)\big| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et f' est donc intégrable sur $[1, +\infty[$. [48]

[48] Car $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Le théorème 14 donne que la série de terme général : $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\sin(\ln t)}{t}\mathrm{d}t - \frac{\sin(\ln n)}{n}$

est absolument convergente et il en résulte que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$ avec :

$$v_n = \int_{n-1}^{n} \frac{\sin(\ln t)}{t}\mathrm{d}t$$

Calculons donc $\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k = \int_{1}^{n} \frac{\sin(\ln t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\ln n} \sin u\,\mathrm{d}u = 1 - \cos(\ln n).$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que $\sum v_n$ diverge et il en est de même pour $\sum u_n$.

Théorème 15

Une série complexe $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si les série $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des parties réelles et des parties imaginaires sont absolument convergentes. [49]
L'ensemble des séries complexes absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries complexes convergentes.

[49] $u_n = a_n + ib_n$, $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$.

a) Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant |x| + |y| \text{ et } |x| \leqslant |z|,\ |y| \leqslant |z|.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant |a_n| + |b_n|$ donc l'absolue convergence des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ donne celle de $\sum u_n$.
De même, avec $|a_n| \leqslant |u_n|$ et $|b_n| \leqslant |u_n|$, l'absolue convergence de $\sum u_n$ donne celle de chacune des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

b) D'après le théorème 6, c'est un sous-ensemble non vide (il contient la série nulle) de l'ensemble des séries complexes convergentes et il est stable par combinaison linéaire car :

$$|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda|\ |u_n| + |\mu|\ |v_n|.$$

Théorème 16

Une série complexe $\sum u_n$ absolument convergente est commutativement convergente. [50]

[50] Ce résultat est admis.

2. Produit de Cauchy de deux séries complexes

Définition 13

Le **produit de Cauchy** de deux séries réelles ou complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ de terme général $\quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème 17

$S(\mathbb{C})$ muni des trois opérations – somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire, produit de Cauchy – est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative. [51]

[51] Même démonstration que pour la vérification de la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[X]$.

Théorème 18

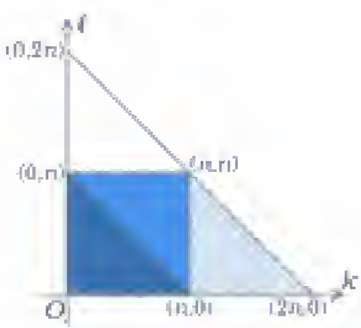
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes réels positifs, convergentes. Leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est une série convergente et de plus : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)$.

[52] Posons $\quad U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k,\ W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$

[52] Cette démonstration n'est pas exigible des étudiants.

On a $\quad W_n = \sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell,\quad T_n = \left\{(k,\ell)\in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leqslant k \leqslant n,\ 0 \leqslant \ell \leqslant n-k\right\}.$

En posant $I_n = [\![0, n]\!]$, on a $\quad T_n \subset I_n^2 \subset T_{2n}$.



$\sum u_n$ et $\sum v_n$ étant à termes réels positifs, on en déduit :

$$\sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in I_n^2} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in T_{2n}} u_k v_\ell$$

c'est-à-dire $\quad W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}$

$W_n \leqslant U_n V_n$ donne, pour tout n, $W_n \leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$.

Donc, d'après le théorème 9, $\sum w_n$ converge (53) et $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$.

(53) $\sum w_n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée.

De $U_n V_n \leqslant W_{2n}$, on déduit ensuite par passage à la limite :

$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} w_k$. Finalement $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$.

Théorème 19

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries complexes absolument convergentes. Leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est une série absolument convergente et de plus $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

On a, pour tout n, $|w_n| \leqslant w'_n$ avec $w'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}|$.

$\sum w'_n$ est le produit de Cauchy de $\sum |u_n|$ et de $\sum |v_n|$ qui sont des séries à termes réels positifs convergentes, donc (54) $\sum w'_n$ est convergente. Il en résulte que $\sum w_n$ est absolument convergente. Avec les notations de la démonstration du théorème 18, on a :

(54) D'après le théorème précédent.

$$U_n V_n - W_n = \sum_{(k,\ell)\in I_n^2\setminus T_n} u_k v_\ell$$

donc : $|U_n V_n - W_n| \leqslant \sum_{(k,\ell)\in I_n^2\setminus T_n} |u_k|\,|v_\ell| = \left(\sum_{k=0}^{n}|u_k|\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}|v_\ell|\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} w'_k\right)$.

Or (55) : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} w'_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}|u_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|v_k|\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}|u_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{n}|v_k|\right)$.

(55) Voir théorème 18.

En conséquence $\lim_{n\to+\infty} W_n - U_n V_n = 0$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right).$$

Exemple 11 Étant donné $z \in \mathbb{C}$, on considère la série de terme général $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n!}$.

a) Montrer que $\sum u_n(z)$ est absolument convergente.

b) On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$. Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ainsi définie vérifie :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\quad f(z_1+z_2) = f(z_1)f(z_2) \text{ (56)}$$

(56) Nous verrons (chapitre 5), que cette fonction coïncide sur $\mathbb{R}$ avec exp. On l'appelle exponentielle complexe.

a) Le critère de d'Alembert donne la convergence de $\sum |u_n(z)|$.

b) D'après le théorème 20, on a :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\quad f(z_1)f(z_2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\,\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

Donc $f(z_1)f(z_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^k z_2^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = f(z_1+z_2)$.

D. Séries alternées

Les méthodes, dans cette section, seront utilisées pour l'étude de séries dont on n'a pas pu établir l'absolue convergence. En dehors des séries alternées, aucune connaissance spécifique sur les séries semi-convergentes n'est au programme.

Définition 14

Une série réelle $\sum u_n$ est dite **alternée** si et seulement si la suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$.

N.B. On pose, par convention, $(-1)^0 = 1$.

1. Le critère de Leibniz (57)

(57) aussi appelé critère **spécial** des séries alternées.

Règle 5

Soit $\sum u_n$ une série alternée.

Si la suite $(|u_n|)_{\mathbb{N}}$ décroît et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.

- On montre que les suites de sommes partielles (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes.

En effet $|U_{2n+1} - U_{2n}| = |u_{2n+1}|$ donc $\lim_{n\to+\infty} (U_{2n+1} - U_{2n}) = 0$,

et, si nous supposons être dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n|$, on a :

$$\begin{array}{rcll} U_{2n+2} - U_{2n} & = & |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0, & \text{donc } (U_{2n}) \text{ décroît,} \\ U_{2n+3} - U_{2n+1} & = & -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geqslant 0, & \text{donc } (U_{2n+1}) \text{ croît.} \end{array}$$ (58)

- (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont donc convergentes de même limite, et (U_n) converge.

(58) Dans l'autre cas, les résultats sont inversés.

Exemple important (59)

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, est convergente d'après le critère de Leibniz.

(59) Dans le cas particulier $\alpha=1$, on retrouve la série harmonique alternée.

Remarque

Il faut savoir que ce critère exprime une condition suffisante de convergence et qu'elle n'est absolument pas nécessaire (voir *Mise en œuvre*, exercice 8).

2. Majoration de la somme

Théorème 20

Soit $\sum u_n$ une série alternée convergente d'après le critère de Leibniz et U sa somme. Alors :

a) U est compris entre deux sommes partielles consécutives quelconques.

b) U est du signe de u_0 et $|U| \leqslant |u_0|$.

c) R_n désignant le reste d'ordre n, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$. (60)

(60) On prendra bien garde au fait que ces résultats ne sont valables que si le critère de Leibniz est vérifié. En particulier, le simple fait qu'une série alternée soit convergente ne permet pas d'appliquer cette majoration de R_n.

a) La proposition résulte de ce que les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes.

b) Dans le cas où $u_n = (-1)^n |u_n|$, on a $U_1 \leqslant U \leqslant U_0$,
d'où $0 \leqslant u_0 + u_1 \leqslant U \leqslant u_0$ et la conclusion.
Dans le cas où $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$, on a $U_0 \leqslant U \leqslant U_1$,
d'où $u_0 \leqslant U \leqslant u_0 + u_1 \leqslant 0$ et la conclusion.

c) On applique b) à la série $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ de somme R_n.

Méthodes

L'essentiel

I. Séries à termes positifs

✔ **Si l'on veut** déterminer la nature d'une série Σu_n à termes réels positifs

- **on peut** transformer l'expression de u_n au moyen de développements limités ou asymptotiques pour conclure avec la règle des équivalents ou le critère de domination ou la règle de Riemann ou une combinaison de ces règles,
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 1
- **on peut** dans **le cas particulier** où le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se simplifie, utiliser le critère de d'Alembert,
- **on peut** penser à la formule de Stirling pour conclure avec la règle des équivalents,
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 2
- **on peut** essayer de majorer u_n par le terme général d'une série convergente, alors Σu_n converge, ou de minorer u_n par le terme général d'une série divergente, alors Σu_n diverge,
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 3
- **on peut** essayer de pouver que la suite $(U_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée, alors Σu_n converge, ou qu'elle est minorée par une suite de limite infinie, alors Σu_n diverge,
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 4
- **on peut** penser à comparer Σu_n avec une intégrale.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 5
  Cette méthode amène à utiliser les notions développées dans le chapitre 6.

✔ **Si l'on veut** étudier la nature d'une série Σu_n telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \text{ avec } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$

(cas douteux de la règle de d'Alembert)

- **on peut** s'il existe un développement de la forme :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$ en considérant la série de terme général $v_n = \ln\left[(n+1)^a u_{n+1}\right] - \ln\left[n^a u_n\right]$.
→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 6

II. Séries à termes quelconques

✔ **Si l'on veut** déterminer la nature d'une série Σu_n à termes quelconques

- **on peut** commencer par étudier l'absolue convergence. S'il s'agit d'une série alternée, examiner si elle vérifie le critère de Leibniz,
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 7
- **on peut** au moyen d'un développement limité ou asymptotique, décomposer u_n en une somme de séries plus simples à étudier,
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 8
- **on peut** penser au critère de Cauchy.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 9

III. Sommation des séries numériques

✔ **Si l'on veut** calculer la somme U d'une série $\sum u_n$

- **on peut** penser à écrire u_n sous une forme télélescopique (par exemple : $u_n = h_{n+1} - h_n$) ou télescopique généralisée (par exemple $u_n = h_{n+1} - 2h_n + h_{n-1}$),
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 10
- **on peut** penser à faire apparaître des sommes géométriques (éventuellement à une intégration près),
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 11
- **on peut** observer que U est la valeur prise par la somme d'une série entière ou d'une série de Fourier en un point de l'ensemble de convergence (cette méthode sera illustrée dans les chapitres **5** et **7**).

IV. Suites et séries

✔ **Si l'on veut** étudier la nature d'une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$

- **on peut** penser à considérer la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 12

Méthodes

Mise en œuvre

I. Séries à termes positifs

Ex. 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

1) $u_n = \left(\ln \operatorname{sh} n^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} - n,\ \ \alpha > 0$;

2) $u_n = \sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + an},\ \ a \in \mathbb{R}$;

3) $u_n = \dfrac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + \left(\sqrt{n}\right)^{\ln n}},\ \ a > 0, b > 0$;

4) $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;

5) $u_n = \left(\cos \dfrac{1}{\ln n}\right)^{2(\ln n)^2}$.

Indications

1) Rechercher un équivalent simple.

2) Effectuer un développement limité de u_n à l'ordre 2 au sens fort.

3) Donner suivant les valeurs de a et b un équivalent simple, puis appliquer éventuellemnet la règle de Riemann.

4) Appliquer la règle de Riemann.

5) Écrire u_n sous forme exponentielle, effectuer un développement asymptotique de l'exposant puis conclure par la règle des équivalents ou la règle de Riemann.

Solution

1) En écrivant $\operatorname{sh} n^\alpha = \dfrac{e^{n^\alpha}}{2}\left(1 - e^{-2n^\alpha}\right)$, il vient :

$$\ln \operatorname{sh} n^\alpha = n^\alpha - \ln 2 + \ln\left(1 - e^{-2n^\alpha}\right)$$
$$= n^\alpha\left(1 - \frac{\ln 2}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$
$$\left(\ln \operatorname{sh} n^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = n\left(1 - \frac{\ln 2}{\alpha\, n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

D'où $\quad u_n \sim -\dfrac{\ln 2}{\alpha\, n^{\alpha-1}}$.

D'après la règle des équivalents, on en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$

2) On remarque d'abord que quel que soit a, u_n est de signe constant à partir d'un certain rang. Donc au besoin en remplaçant u_n par $-u_n$, on se ramène à l'étude d'une série à termes positifs.

Commentaires

Penser à factoriser e^{n^α} pour prendre le logarithme.

$\sum u_n$ est de même nature que la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$.

Il suffit d'écrire
$u_n = \dfrac{(1-a)n+1}{\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt{n^4+an}}$.

Effectuons un développement limité d'ordre 2 au sens fort :

$$u_n = n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} - n^2\sqrt{1+\frac{a}{n^3}}$$

$$u_n = n^2\left[1+\frac{1}{2n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] - n^2\left[1+\frac{a}{2n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$

$$u_n = \frac{1-a}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a \neq 1$, on en déduit $u_n \sim \dfrac{1-a}{2n}$ donc $\sum u_n$ diverge.

Si $a = 1$, il reste $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ce qui montre que $\sum u_n$ converge.

Remarquer la simplification des calculs apportée par l'utilisation des développements limités au sens fort : il aurait été totalement inutile de calculer le coefficient de $\frac{1}{n^3}$.

3) Les règles de comparaison des fonctions puissances et logarithmes donnent :

- pour $a > 1$ et $b > 1$, $u_n \sim \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$,
- pour $a \leqslant 1$ et $b > 1$, $u_n \sim \dfrac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n}$,
- pour $a > 1$ et $b \leqslant 1$, $u_n \sim \dfrac{a^n}{(\sqrt{n})^{\ln n}}$,
- pour $a \leqslant 1$ et $b \leqslant 1$, $u_n \sim \dfrac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^{\ln n}}$.

On en déduit :

- pour $a > 1$ et $b > 1$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < b$;
- pour $a \leqslant 1$ et $b > 1$, $n^2 u_n \sim e^{2\ln n + \sqrt{n}\ln(\ln n) - n\ln b}$;
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, et $\sum u_n$ converge ;
- pour $a > 1$ et $b \leqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, et $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- pour $a \leqslant 1$ et $b \leqslant 1$, $u_n \sim e^{\sqrt{n}\ln(\ln n) - \frac{1}{2}\ln^2 n}$,
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, et $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Sachant que $\ln(\ln n) = o(\sqrt{n})$, on obtient :
$\dfrac{a^n}{(\ln n)^{\sqrt{n}}} = e^{n\ln a - \sqrt{n}\ln(\ln n)} = e^{n\ln a + o(n)}$

donc, si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{(\ln n)^{\sqrt{n}}} = +\infty$
soit $(\ln n)^{\sqrt{n}} = o(a^n)$ et $a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}} \sim a^n$.

Si $a \leqslant 1$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^{\sqrt{n}} = +\infty$
et $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a^n \leqslant 1$, il est clair que :
$a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}} \sim (\ln n)^{\sqrt{n}}$.
On raisonne de même pour le dénominateur.

Dans le cas où $u_n \sim \left(\frac{a}{b}\right)^n$, on conclut avec la règle des équivalents sachant que la série géométrique $\sum \left(\frac{a}{b}\right)^n$ converge si et seulement si $\frac{a}{b} < 1$.
Dans le deuxième cas, on conclut avec la règle de Riemann.

4) On a ici $u_n = e^{\ln^2 n - n\ln(\ln n)}$,
donc $n^2 u_n = e^{2\ln n + \ln^2 n - n\ln(\ln n)} = e^{-n\ln(\ln n) + o(\ln(\ln n))}$.
Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ et la série converge d'après la règle de Riemann.

On utilise :
$\ln n = o(n)$ et $\ln^2 n = o(n)$

5) Le développement limité à l'ordre 2 de cos en 0 donne :

$$\cos\frac{1}{\ln n} = 1 - \frac{1}{2\ln^2 n} + o\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right),$$

on en déduit :

$$\ln\left(\cos\frac{1}{\ln n}\right) = -\frac{1}{2\ln^2 n} + o\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)$$

$$u_n = e^{-(\ln n)^{\alpha-2} + o\left((\ln n)^{\alpha-2}\right)}$$

Il apparaît alors que pour $\alpha \leqslant 2$, u_n ne tend pas vers 0 et la série est grossièrement divergente.
On suppose maintenant $\alpha > 2$.

En formant $n^\beta u_n = e^{\beta\ln n - (\ln n)^{\alpha-2} + o\left((\ln n)^{\alpha-2}\right)}$, on voit que :

- si $\alpha > 3$, $n^2 u_n$ tend vers 0 donc $\sum u_n$ converge,
- si $\alpha < 3$ $n u_n$ tend vers $+\infty$ donc $\sum u_n$ diverge.

Noter que dans le cas $\alpha > 2$, le développement obtenu ne permet pas de donner un équivalent plus simple de u_n, ce qui serait d'ailleurs sans le moindre intérêt.
Avec pour objectif d'appliquer la règle de Riemann, on forme le produit $n^\beta u_n$ que l'on écrit sous forme exponentielle.
Ceci étant fait, on s'aperçoit que :

- si $\alpha - 2 > 1$, on a $\ln n = o\left((\ln n)^{\alpha-2}\right)$
et donc, quel que soit β,
$u_n = e^{-(\ln n)^{\alpha-2} + o\left((\ln n)^{\alpha-2}\right)}$
et $\lim n^\beta u_n = 0$. Il reste à choisir convenablement β pour conclure.
- si $\alpha - 2 < 1$, on a $(\ln n)^{\alpha-2} = o(\ln n)$
d'où $n^\beta u_n = e^{\beta\ln n + o(\ln n)}$ et quel que soit $\beta > 0$, $\lim n^\beta u_n = +\infty$.

Dans le cas $\alpha = 3$, on reprend le développement :

$$\cos \frac{1}{\ln n} = 1 - \frac{1}{2 \ln^2 n} + o\left(\frac{1}{\ln^3 n}\right)$$

$$\ln\left(\cos \frac{1}{\ln n}\right) = -\frac{1}{2 \ln^2 n} + o\left(\frac{1}{\ln^3 n}\right)$$

$$u_n = e^{-\ln n + o(1)}.$$

Il en résulte $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et la série $\sum u_n$ diverge d'après la règle des équivalents.

On sait que e^{a+u} est équivalent à e^{a} si et seulement si u tend vers 0, donc si et seulement si $u = o(1)$.
L'ordre du développement de $\cos$ est donc choisi de façon à obtenir $o(1)$ dans le dernier développement.

Ex. 2

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif a la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(3n)!}{a^{3n}(n!)^3}.$$

Indications

Avec un produit de factorielles et de puissances le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ se simplifie de façon intéressante.

Solution

Formons $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{3(3n-2)(3n-1)}{a^3 n^2}$, on obtient clairement :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \sim \left(\frac{3}{a}\right)^3.$$

Il en résulte que, pour $a > 3$, la série converge et que, pour $0 < a < 3$, elle diverge.

Pour étudier le cas $a = 3$, envisageons deux méthodes.

1. Avec la formule de Stirling, on obtient :

$$(3n)! \sim (3n)^{3n} e^{-3n}\sqrt{6\pi n} \text{ et } (n!)^3 \sim n^{3n} e^{-3n}\sqrt{8\pi^3 n^3}$$

donc $u_n \sim \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi n}$ et $\sum u_n$ diverge.

2. Effectuons les développements limités :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln \frac{u_n}{u_{n-1}} = -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln n u_n - \ln(n-1)u_{n-1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que la série de terme général $\ln n u_n - \ln(n-1)u_{n-1}$ converge et donc que la suite $(\ln n u_n)_{\mathbb{N}}$ est également convergente.

En posant $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln n u_n$ et $\lambda = e^{\ell}$, on a finalement $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$ et on retrouve ainsi que $\sum u_n$ diverge.

Commentaires

Remarquer que le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ et plus simple que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Pour $a \neq 3$, on se trouve dans le cas favorable où la règle de d'Alembert s'applique.

Noter la méthode : pour étudier la suite $(\ln n u_n)_{\mathbb{N}}$, on considère la série de terme général $\ln n u_n - \ln(n-1)u_{n-1}$.
(Cf. théorème 2.)

Ex. 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10.
Étudier, en fonction du réel strictement positif a, la nature de la série de terme général $u_n = a^{-p_n}$.

Indications

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\log n < p_n \leqslant 1 + \log n$.

Solution

Si n s'écrit avec p chiffres, on a $10^{p-1} \leqslant n < 10^p$ donc $(p-1) \leqslant \log n < p$.
Il en résulte $\log n < p_n \leqslant 1 + \log n$.
Pour $a \leqslant 1$, u_n ne tend pas vers 0, la série diverge grossièrement.

Pour $a > 1$, l'encadrement précédent donne $a^{-1-\log n} \leqslant u_n < a^{-\log n}$,

c'est-à-dire , en posant $v_n = a^{-\log n}$, $\frac{1}{a}v_n \leqslant u_n < v_n$.

Le premier théorème de comparaison des séries à termes positifs montre alors que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Puisque $v_n = \dfrac{1}{n^{\log a}}$, il en résulte que $\sum u_n$ converge si et seulement si $a > 10$.

Commentaires

$\log$ désigne le logarithme décimal.

Pour $a>1$, la fonction $x \mapsto a^{-x}$ est décroissante.

$u_n < v_n$ montre que $\sum u_n$ est convergente lorsque $\sum v_n$ l'est.
$v_n \leqslant a u_n$ montre l'implication réciproque.

Ex. 4

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ la suite croissante formée des entiers naturels non nuls dont l'écriture en base 10 ne contient pas le chiffre 1.

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{a_n}$, $\quad n \geqslant 1$.

Indications

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, dénombrer les a_n compris entre 10^{p-1} et $10^p - 1$ puis en déduire une majoration des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Solution

Soit I_p l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base 10 est formée de p chiffres ne comprenant pas le caractère 1. On pose $N_p = \operatorname{Card} I_p$.
L'entier n appartient à I_p si et seulement s'il s'écrit $a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_1 a_0$ avec $a_{p-1} \in [\![1, 9]\!]$ et $\forall k \in [\![0, p-2]\!]$, $\;a_k \in [\![0, 9]\!]$.
On en déduit $\operatorname{Card} I_p = 8 \cdot 9^{p-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \in I_q$.

On a alors $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \leqslant \sum_{p=1}^{q} \sum_{a_k \in I_p} \frac{1}{a_k}$.

En remarquant que $\displaystyle\sum_{a_k \in I_p} \frac{1}{a_k} \leqslant 8 \cdot 9^{p-1} \times \frac{1}{10^{p-1}}$, il vient :

$$U_n \leqslant 8 \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{p-1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad U_n \leqslant 80.$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente.

Commentaires

Il y a 8 possibilités pour a_{p-1} et 9 possibilités pour chaque a_k, $0 \leqslant k \leqslant p-2$.

Il s'agit d'une série à termes positifs, pour en prouver la convergence, on montre que la suite des sommes partielles est majorée.

Ex. 5

Étudier suivant les valeurs du réel α, la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^\alpha}$.

Indications

Utiliser le théorème de comparaison avec une intégrale.

Solution

Dans le cas $\alpha \leqslant 0$, pour $n \geqslant e^e$, on a $u_n \geqslant \dfrac{1}{n \ln n}$ donc, sachant que la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ est divergente, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

Dans le cas $\alpha > 0$, la fonction $f \ : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^\alpha}$ est positive décroissante sur $]e, +\infty[$, on sait, d'après le théorème 10, que $\sum u_n$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, $(a > e)$.

Le changement de variable défini par $u = \ln \ln t$ donne pour tout $x \geqslant a$:

$$\int_a^x \frac{1}{t \ln t (\ln \ln t)^\alpha} \mathrm{d}t = \int_{\ln \ln a}^{\ln \ln x} \frac{1}{u^\alpha} \mathrm{d}u.$$

On en déduit que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $u \mapsto \dfrac{1}{u^\alpha}$ est intégrable sur $[\ln \ln a, +\infty[$.

Donc $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$

Commentaires

L'étude des séries de Bertrand a été faite par comparaison avec une intégrale. (Voir le formulaire 3.)

Par exemple a=3.

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t \ln t}$

La fonction f étant continue positive sur $[a, +\infty[$, elle est intégrable sur cet intervalle si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ admet une limite réelle lorsque x tend vers $+\infty$ (cf. chap 6), et il en est de même pour $u \mapsto \frac{1}{u^\alpha}$.

Ex. 6

Étudier la série de terme général : $\quad u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right).$

Indications

Pour prouver que la suite de terme général nu_n converge, on introduit la série :

$$\sum \ln \left(nu_n\right) - \ln \left((n-1)u_{n-1}\right).$$

Solution

Formons $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 2 - e^{\frac{1}{n}}$, il est clair que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1$.

Effectuons alors un développement limité à l'ordre 2 au sens fort :

$$2 - e^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a donc aussi : $\quad \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right) = -\dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

et avec $\quad \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right) = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

il vient : $\quad \ln\left(\dfrac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Commentaires

Pour tout k≥2 on a $e^{\frac{1}{k}}$<2, $\sum u_n$ est donc bien une série à termes positifs.

Noter que l'on obtient des calculs plus simples en considérant le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ plutôt que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Ainsi la série $\sum \ln(nu_n) - \ln((n-1)u_{n-1})$ est convergente et il en est de même pour la suite de terme général $\ln(nu_n)$.
En posant $\ell = \lim_{n\to+\infty} \ln(nu_n)$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} nu_n = e^{\ell}$. Il existe donc $\lambda > 0$, $(\lambda = e^{\ell})$ tel que $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$ et la série $\sum u_n$ diverge.

C'est toujours le théorème 2.

II. Séries à termes quelconques

Ex. 7

Étudier suivant les valeurs du réel α la convergence absolue et la semi-convergence de la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n \frac{e^{\sqrt{\ln(\ln n)}}}{n^{\alpha}}.$$

Indications

Le critère de Leibniz peut s'appliquer lorsque la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante à partir d'un certain rang et tend vers 0 (bien sûr!).

Solution

Pour $n \geqslant 3$, écrivons $|u_n| = \exp\left[\sqrt{\ln(\ln n)} - \alpha \ln n\right]$.
Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

- Étude de l'absolue convergence.

Si $0 < \alpha \leqslant 1$, $|u_n| \geqslant \dfrac{1}{n}$ et, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ diverge.
Si $\alpha > 1$, on a $\beta = \dfrac{1+\alpha}{2} > 1$ et :

$$n^{\beta}|u_n| = \exp\left[\sqrt{\ln(\ln n)} - (\alpha - \beta)\ln n\right].$$

Comme $\beta < \alpha$, il vient $\lim_{n\to+\infty} n^{\beta}|u_n| = 0$, donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^{\beta}}\right)$ et, par le critère de Riemann, la série $\sum |u_n|$ converge.
En conclusion, la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

- Étude de la semi-convergence.

D'après le début de l'étude, on n'a plus à considérer que le cas $0 < \alpha \leqslant 1$.
Étudions maintenant les variations de la suite $(|u_n|)$.
Considérons la fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{\ln t} - \alpha t$ sur $]1, +\infty[$.

Sa dérivée est $\varphi'(t) = \dfrac{1}{2t\sqrt{\ln t}} - \alpha$.

Commentaires

On élimine d'abord les cas de divergence grossière.

Il existe un réel t_0 au-delà duquel $\varphi'(t) \leqslant 0$, donc φ est décroissante sur $[t_0, +\infty[$.
Comme $u_n = (-1)^n \exp\left[\varphi(\ell n\, n)\right]$, la suite $n \mapsto |u_n|$ est décroissante à partir d'un certain rang.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (car $\alpha > 0$), donc le critère de Leibniz assure la convergence de la série $\sum u_n$.
En conclusion, la série $\sum u_n$ est semi-convergente si et seulement si $0 < \alpha \leqslant 1$.

Par exemple, si $\alpha = \frac{1}{2}$, pour $t \geqslant 2$, on a : $2t\sqrt{\ell n\, t} \geqslant 4$ donc $\varphi'(t) < 0$.
En conséquence, puisque $n \geqslant 8$ donne $\ell n\, n \geqslant 2$, on en déduit que $(|u_n|)_{n \geqslant 8}$ est décroissante.

Ex. 8

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif α la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}},\ n \geqslant 2.$$

Indications

En factorisant $n^{\frac{\alpha}{2}}$ en dénominateur, on effectue un développement asymptotique à deux termes.

Solution

Comme $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 2$.
Pour $0 < \alpha \leqslant 2$, écrivons au voisinage de $+\infty$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}\right).$$

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ converge d'après le critère de Leibniz.

Avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - u_n$ on a $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}$,

(v_n) est donc positive au voisinage de $+\infty$, la règle des équivalents s'applique : $\sum v_n$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}$ c'est-à-dire qu'elle converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{2}{3}$.

En conclusion :

- pour $0 < \alpha \leqslant \dfrac{2}{3}$, $\sum u_n$ diverge en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente ;
- pour $\alpha > \dfrac{2}{3}$, $\sum u_n$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.

Remarque. Dans le cas $\alpha = \dfrac{1}{3}$, on a $\sum u_n$ divergente et $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{1/6}}$ convergente, bien que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^{1/6}}$: **la règle des équivalents ne s'applique pas aux séries qui ne sont pas de signe constant au voisinage de $+\infty$.**

Commentaires

Puisque α est strictement positif, la suite $\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle.

On limite le développement à deux termes, car, dans le second, l'alternance de signe a disparu, ce qui permet de conclure avec la règle des équivalents.
Remarquer que, dans le cas $\alpha = 1$ par exemple, la série converge alors que la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante : le critère de Leibniz n'est pas une condition nécessaire de convergence.

Ex. 9

Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos(\ell n\, n)}{n}$ est divergente.

Indications

Montrer que le critère de Cauchy n'est pas satisfait en exhibant deux suites $(n_1(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(n_2(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de limite infinie telles que $\displaystyle\sum_{n=n_1(k)+1}^{n_2(k)} u_n$ ne tende pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Solution

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $2k\pi - \dfrac{\pi}{3} \leqslant \ell n\, n \leqslant 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}$,

c'est-à-dire $e^{2k\pi-\frac{\pi}{3}} \leqslant n \leqslant e^{2k\pi+\frac{\pi}{3}}$, on a $\cos(\ell n\, n) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Posons donc $n_1(k) = E\left(e^{2k\pi-\frac{\pi}{3}}\right)$, $n_2(k) = E\left(e^{2k\pi+\frac{\pi}{3}}\right)$, puis :

$$S_k = \sum_{n=n_1(k)+1}^{n_2(k)} u_n .$$

On a alors $S_k \geqslant \dfrac{n_2(k) - n_1(k)}{2n_2(k)}$.

De $e^{2k\pi-\frac{\pi}{3}} - 1 < n_1(k) \leqslant e^{2k\pi-\frac{\pi}{3}}$ et $e^{2k\pi+\frac{\pi}{3}} - 1 < n_2(k) \leqslant e^{2k\pi+\frac{\pi}{3}}$,

on déduit $n_1(k) \underset{+\infty}{\sim} e^{2k\pi-\frac{\pi}{3}}$, $n_2(k) \underset{+\infty}{\sim} e^{2k\pi+\frac{\pi}{3}}$, donc

$\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{n_1(k)}{n_2(k)} = e^{-\frac{2\pi}{3}}$ puis $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{n_2(k) - n_1(k)}{n_2(k)} = 1 - e^{\frac{-2\pi}{3}} > 0$.

En conséquence, S_k ne tend pas vers 0, d'où la conclusion.

Commentaires

E désigne la fonction partie entière.

III. Sommation des séries numériques

Ex. 10

Prouver la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ avec : $u_n = \dfrac{6^n}{\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right)\left(3^n - 2^n\right)}$;

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$ avec : $v_n = \ell n\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Indications

1) Écrire u_n sous la forme d'une fraction rationnelle en $x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et en déduire une décomposition :

$$u_n = f(n) - f(n+1).$$

2) Le logarithme d'un produit se décompose en une somme.

Solution

1) ▪ Convergence

Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $2^n = o(3^n)$ donc :

$$u_n \sim \frac{6^n}{3 \cdot 3^{2n}} \quad \text{soit aussi} \quad u_n \sim \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente donc $\sum u_n$ converge d'après le critère des équivalents.

▪ Calcul de la somme

Transformons l'expression u_n :

$$u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)},$$

donc en posant $x = \left(\frac{2}{3}\right)^n$: $\quad u_n = \dfrac{\frac{x}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}x\right)(1-x)}$.

On décompose alors cette fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{\frac{x}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}x\right)(1-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-\frac{2}{3}x},$$

d'où $\quad u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} - \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$.

Ainsi on a écrit u_n sous la forme $f(n) - f(n+1)$ et il en résulte :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = f(1) - f(n+1) \quad \text{puis} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 2.$$

2) ▪ Convergence

Lorsque n tend vers $+\infty$ on a directement $v_n \sim -\frac{1}{n^2}$, et la convergence de $\sum v_n$ en résulte.

▪ Calcul de la somme

Pour tout $n \geqslant 2$, on a $v_n = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$.

Donc, en notant $V_n = \sum_{k=2}^{n} v_k$, il vient :

$$V_n = \sum_{k=3}^{n+1} \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} \ln k - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k$$

$$V_n = -\ln 2 + \ln(n+1) - \ln n.$$

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\ln 2$ c'est-à-dire $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n = -\ln 2$.

Commentaires

Il faut retenir le fait que la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle est un bon moyen pour écrire u_n sous la forme souhaitée. On divise le numérateur et le dénominateur par 3^{2n+1}.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 3 - \lim_{n\to+\infty} f(n+1)$$

$\sum v_n$ est une série à termes négatifs, la règle des équivalents s'applique.

Noter le télescopage : en isolant dans V_n la somme $\sum_{k=3}^{n-1} \ln k$, on s'aperçoit que son coefficient est : $1+1-2$ soit 0.

Remarque : on peut aussi écrire v_n sous la forme $f(n+1)-f(n)$ avec $f(n)=\ln n - \ln(n-1)$.

Ex. 11

Montrer la convergence, puis calculer la somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$.

Indications

Pour la convergence, utiliser le critère de Leibniz.

On peut prouver que u_n tend vers 0 en effectuant un découpage de l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}$.

La somme partielle d'ordre n est l'intégrale sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ d'une somme géométrique.

Solution

- Étude de la convergence.

$\sum u_n$ est une série alternée, on se propose donc d'utiliser le critère de Leibniz.

Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \cos^{n+1} x \leqslant \cos^n x \text{ et } |u_{n+1}| \leqslant |u_n|.$$

Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, écrivons $|u_n| = \int_0^{\varepsilon} \cos^n x\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$.

Puisque la fonction $\cos^n$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :

$$|u_n| \leqslant \varepsilon + (\frac{\pi}{2} - \varepsilon)\cos^n \varepsilon \leqslant \varepsilon + \frac{\pi}{2}\cos^n \varepsilon.$$

Sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^n \varepsilon = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{pour tout } n \geqslant n_0, \quad 0 < \frac{\pi}{2}\cos^n \varepsilon < \varepsilon.$$

Ainsi on a obtenu :

$$\forall \varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \;\Rightarrow\; |u_n| \leqslant 2\varepsilon,$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

En conséquence, $\sum u_n$ converge d'après le critère de Leibniz.

- Calcul de la somme.

Formons $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^k x\,\mathrm{d}x$

On a aussi $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(-1)^n\cos^n x}{1+\cos x}\mathrm{d}x.$

Commentaires

On dispose de nombreuses méthodes pour montrer que l'intégrale de Wallis :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\mathrm{d}x$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$:

- en découpant l'intégrale $\int_0^{\pi/2}$ en :

$$\int_0^{n^{-1/4}} + \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2}$$

on obtient $W_n \leqslant n^{-1/4} + \frac{\pi}{2}\left(\cos n^{-1/4}\right)^n$,

et on conclut avec :

$$\left(\cos n^{-1/4}\right)^n = e^{-\frac{n^{1/2}}{2} + o(n^{1/2})};$$

- de la relation de récurrence :

$$nW_n = (n-1)W_{n-2},$$

(voir la démonstration de la formule de Leibniz dans ce chapitre) on en déduit :

$$W_n \sim \sqrt{\pi/2n};$$

- avec la même relation de récurrence, en considérant la série de terme général $\ln\left(n^{1/2}W_{2n}\right) - \ln\left((n-1)^{1/2}W_{2(n-1)}\right)$, on montre qu'il existe $\mu > 0$ tel que :

$$W_{2n} \sim \mu n^{-1/2};$$

et enfin $W_{2n} \sim W_{2n+1}$ donne $W_n \sim \lambda n^{-1/2}$;

- enfin, le théorème de convergence dominée (voir chap. 6) nous donnera une solution très rapide.

On s'assure pour justifier ce calcul que, quel que soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la raison de la série géométrique est différente de 1.

En remarquant que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{1+\cos x} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x = |u_n|$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{1+\cos x} \mathrm{d}x = 0$, d'où il résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \left[\tan \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

et finalement $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.

On verra dans le chapitre suivant que ce qui est fait ici consiste à justifier l'intégration terme à terme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la série de fonctions de terme général $u_n : x \mapsto (-1)^n \cos^n x$.
Cette opération ne pourra jamais être faite sans justification.

IV. Suites et séries

Ex. 12

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ell n\, n$.

Indications

Considérer la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.

Solution

Pour $n \geqslant 2$, posons $v_n = u_n - u_{n-1}$.
Un développement limité d'ordre 2 au sens fort donne :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \ell n\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit la convergence de la série $\sum v_n$ et donc la convergence de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.

Commentaires

Noter qu'il est inutile de développer à l'ordre 2 au sens strict.

Exercices

Niveau 1

Séries à termes positifs

Ex. 1

Étudier la nature des séries données par leur terme général u_n :

1) $\dfrac{n!}{n^n}$;

2) $a^{\frac{1}{n}} - \dfrac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}$ où $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$;

3) $\operatorname{Arccos} \dfrac{n^\alpha}{1 + n^\alpha}$, $\alpha > 0$;

4) $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$;

5) $\left(1 - \dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln^\alpha n}$.

Ex. 2

Soit $u_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$.

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série de terme général u_n converge.

Ex. 3

Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1 - x)\mathrm{d}x.$$

Remarque : cet exercice utilise les résultats du chapitre 6.

Ex. 4

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs pour laquelle il existe $\alpha > 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha.$$

Montrer que $\sum u_n$ converge.

Application : $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n - 1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n + 1}$.

Ex. 5

Soit $f : [1, +\infty[\to]0, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

Démontrer que la série de terme général $f(n)$ converge.

Ex. 6

Soit $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, et $\sum u_n$, $n \geq 1$ une série convergente à termes positifs.

Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ converge.

Séries à termes quelconques

Ex. 7

Étudier la nature des séries données par leur terme général u_n :

1) $\dfrac{(-1)^n}{n - (\ln n)^\alpha}$, $(\alpha > 0)$;

2) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2 + k^2}\right)$, $(k \in \mathbb{R})$;

3) $\dfrac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$;

4) $\cos\left[\pi n^2 \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$;

5) $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, $(\alpha > 0)$;

6) $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}\right|^{\ln n}$.

Sommation des séries

Ex. 8

Prouver la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$;

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

Ex. 9

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n - \frac{1}{2}}$.

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 10

On donne une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et on définit la suite $(y_n)_{\mathbb{N}}$ par :

$$y_0 = x_0 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_{n+1} + y_n}{1 + x_{n+1}\, y_n}.$$

Étudier la nature de la série de terme général $1 - y_n$.

Ex. 11

Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = a^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}} \qquad a > 0.$$

Ex. 12

Étudier la série de terme général $u_n = 10 - n^{\frac{1}{p}}$ où p est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

Ex. 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive.

On pose $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k\right)$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et, qu'en cas de convergence, elles ont même somme.

Ex. 14

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

Discuter la nature de la série $\sum v_n$ avec :

$$v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}.$$

Ex. 15

Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ où $u_n = n \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}}$.

Remarque : cet exercice utilise les résultats du chapitre 6.

Ex. 16

Soit (u_n) une suite décroissante de réels strictement positifs telle que la série $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$, converge.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} u_n$.

Ex. 17

La règle de Raabe Duhamel

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1) Montrer que :

si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge,

si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge.

2) En considérant les séries de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$, montrer que $\alpha = 1$ est un cas douteux.

3) Étudier la série de terme général :

$$u_n = \sqrt{n!}\prod_{p=1}^{n} \sin\frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Ex. 18

Étudier la série de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Convergence et calcul de la somme.

Ex. 19

Étudier la série de terme général :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1.$$

Ex. 20

Prouver la convergence et calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} nx \operatorname{ch}(n+1)x}.$$

Avec éléments de solution

Ex. 21

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

Ex. 22

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k.$$

Ex. 23

Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)^\alpha} + \frac{1}{(3n-1)^\alpha} + \frac{1}{(3n)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}, \quad (n \geqslant 1).$$

Ex. 24

Montrer qu'il existe une suite réelle (x_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{x_n} + x_n - n = 0.$$

Étudier la série de terme général :

$$u_n = x_n - a \ln n - \frac{b}{n} \ln n, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Ex. 25

Prouver la convergence et calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}.$$

Ex. 26

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels strictement positifs, α et β deux réels tels que $0 < \alpha < 1$, et $\alpha + \beta > 1$.

Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n^\alpha}{n^\beta}$.

Ex. 27

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs et :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On suppose que pour tout $n \geqslant 1$, $S_{2n} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) S_n$.

Montrer que $\sum u_n$ converge.

Ex. 28

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ diverge. Étudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}.$$

Ex. 29

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. Montrer que la série $\sum u_n$ où $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ diverge.

Ex. 30

Étudier la série de terme général :

$$u_n = n! \sin x \sin \frac{x}{2} \cdots \sin \frac{x}{n},$$

où x est un réel donné.

Ex. 31

Étudier la suite de terme général :

$$u_n = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{p+1}}{p^\alpha}\right),\ \alpha \in]0, 1[.$$

Niveau 3

Avec solution détaillée

Ex. 32

Soit $\sum u_n$ une série réelle positive, convergente.

Pour tout entier $n \geqslant -1$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$ est convergente.

2) Montrer que la série de terme général $w_n = \dfrac{u_n}{R_n}$ est divergente.

Ex. 33

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante et p un entier naturel fixé, $p \geqslant 2$.

Montrer que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum p^n u_{p^n}$.

Application : nature de $\sum \dfrac{1}{n (\ln n)^\lambda}$.

Ex. 34

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

Démontrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature avec :

$$v_n = \frac{1}{n}\left(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}\right).$$

Ex. 35

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente, pour $n \geqslant 2$, on pose :

$$v_n = \frac{u_1 \ln 2 + u_2 \ln 3 + \cdots + u_n \ln(n+1)}{n \ln n \ln(n+1)}.$$

Montrer que $\sum v_n$ converge.

Ex. 36

Étudier la série de terme général :

$$u_n = n^\alpha \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}}\right).$$

Ex. 37

Soit α un réel strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Remarque : cet exercice utilise les résultats du chapitre 6.

Avec éléments de solution

Ex. 38

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs. On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \,\ell n\, \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^{\ell n\, n} = \ell,$$

(éventuellement $\ell = +\infty$).

1) Montrer que :

si $\ell > e$, $\sum u_n$ converge,

si $\ell < e$, $\sum u_n$ diverge.

2) Montrer que, pour $\ell = e$, on a un cas douteux (considérer les séries $\sum \frac{1}{n\,\ell n\, n(\ell n\,\ell n\, n)^\beta}$).

Ex. 39

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ell n\, k}.$$

Ex. 40

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \ell n \left(\tan \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right).$$

Ex. 41

La transformation d'Abel

Étant donné $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

1) Montrer que la suite $(A_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{A_n}{(n+1)^\alpha} - 1 + \sum_{k=1}^{n} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right).$$

En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

Pour quelles valeurs de α est-elle absolument convergente ?

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{\cos n\theta}{n^\alpha} \text{ et } w_n = \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}.$$

Étudier la convergence et l'absolue convergence des séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

Ex. 42

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif α la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sqrt{n^\alpha + \cos n} - n^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Indications

Ex. 20

Écrire le terme général comme une fraction rationnelle de $t = e^{2i\pi x}$.

Ex. 25

Exprimer les sommes partielles en fonction de $u_n\sqrt{n}$.

Ex. 27

Considérer les S_{2p}.

Ex. 28

Exprimer u_n en fonction de $S_n = a_0 + \dots + a_n$.

Ex. 29

Considérer $\ell n(\cos u_n)$.

Ex. 32

1) $v_n = (R_{n-1} - R_n)R_n^{-\alpha}$ comparer $\sum v_n$ et $\sum v'_n$ avec $v'_n = R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}$.

2) Comparer w_n à $w'_n = \ell n \dfrac{R_{n-1}}{R_n}$.

Ex. 33

Encadrer $u_{p^n+1} + u_{p^n+2} + \dots + u_{p^{n+1}}$.

Ex. 34

Comparer les sommes partielles :

$$V_n \text{ et } U_{2n-1} \quad , \quad U_n \text{ et } V_n .$$

Ex. 35

Comparer $\dfrac{1}{n\,\ell n\,n\,\ell n(n+1)}$ et $\dfrac{1}{\ell n\,n} - \dfrac{1}{\ell n(n+1)}$ au voisinage de $+\infty$.

Ex. 36

Considérer les suites de termes généraux :

$$P_n = \prod_{p=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}}\right) \quad \text{et} \quad Q_n = \sqrt{n}P_n$$

et les séries :

$$\sum \ell n \frac{P_n}{P_{n-1}} \quad \text{et} \quad \sum \ell n \frac{Q_n}{Q_{n-1}}.$$

Ex. 37

Utiliser le théorème 14 et l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{2\alpha}}\,\mathrm{d}x$.

Ex. 38

Comparer $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n(\ell n\,n)^\beta}$ au moyen du théorème de comparaison logarithmique

Ex. 39

La décroissance de $(|u_n|)$ peut se déduire de la convexité de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ell n\,x}$.

Ex. 40

$u_n = \ell n\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - R_n\right)\right]$ avec :

$$R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ex. 41

2) Écrire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $e^{ik\theta} = A_k - A_{k-1}$.

3) Dans le cas $0 < \alpha \leqslant 1$, remarquer que :

$$|\cos n\theta| \geqslant \cos^2 n\theta$$

et de même $|\sin n\theta| \geqslant \sin^2 n\theta$.

Ex. 42

Effectuer un développement asymptotique de u_n et utiliser les résultats de l'exercice précédent.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) Formons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{(n+1)^{n+1}}n^n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{e}$, donc $\sum u_n$ converge d'après le critère de d'Alembert.

2) L'étude s'appuie sur le développement limité suivant :

$$\text{quand } n \to +\infty : \ a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln a} = 1 + \frac{\ln a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On obtient ici $\quad u_n = \dfrac{1}{n}\left[\ln a - \dfrac{1}{2}(\ln b + \ln c)\right] + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

- Si $\quad a \neq \sqrt{bc} \quad$ on a $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{a}{\sqrt{bc}}$;

la série de terme général u_n diverge d'après la règle des équivalents de séries positives.

- Si $\quad a = \sqrt{bc} \quad$ on a $\quad u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$;

la série de terme général u_n converge d'après la règle de Riemann.

3) Il est clair que u_n tend vers 0, on a donc $u_n \sim \sin u_n$.

Avec $\sin u_n = \sqrt{1-\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^2} = \sqrt{1-\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^{-2}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n^\alpha}}$, il vient : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}$.

D'après la règle des équivalents, on en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

<u>**Remarque**</u> : on peut aussi écrire : $\cos u_n = 1 - \dfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$, $\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha} = 1 - \dfrac{1}{n^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, d'où :

$$u_n^2 + o(u_n^2) = \frac{2}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

puis par transitivité des équivalents : $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^\alpha}$ et, u_n étant positif, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}$.

4) En remarquant que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, il vient :

$$u_n = e^{-\sqrt{n}\ln\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = e^{-\sqrt{n}\left[\ln\sqrt{n}+\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\right]} = e^{-\sqrt{n}\left[\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+o(1)\right]} = e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}\ln n+o\left(\sqrt{n}\ln n\right)}.$$

Puisque $\ln n = o\left(\sqrt{n}\ln n\right)$, on a $\ n^2 u_n = e^{2\ln n-\frac{\sqrt{n}}{2}\ln n+o\left(\sqrt{n}\ln n\right)} = e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}\ln n+o\left(\sqrt{n}\ln n\right)}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, donc $\sum u_n$ converge d'après la règle de Riemann.

5) Du développement : $\ln\left(1-\dfrac{1}{\ln n}\right) = -\dfrac{1}{\ln n} + o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$, on déduit $u_n = e^{-\ln^{\alpha-1} n+o\left(\ln^{\alpha-1} n\right)}$.

Donc, pour tout β réel, on peut écrire $\ n^\beta u_n = e^{\beta\ln n-\ln^{\alpha-1} n+o\left(\ln^{\alpha-1} n\right)}$.

- Si $\alpha > 2$, on a $\ell n\, n = o\left(\ell n^{\alpha-1} n\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\beta} u_n = 0$ quel que soit β.

En choisissant $\beta = 2$, avec la règle de Riemann, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ donne la convergence de $\sum u_n$.

- Si $\alpha < 2$, on a $\ell n^{\alpha-1} n = o(\ell n\, n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\beta} u_n = +\infty$ quel que soit $\beta > 0$.

En choisissant $\beta = 1$, avec la règle de Riemann, $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$ donne la divergence de $\sum u_n$.

- Pour $\alpha = 2$, on reprend le développement initial, il vient :

$$u_n = e^{\ell n^2 n\left[-\frac{1}{\ell n\, n} - \frac{1}{2\,\ell n^2 n} + o\left(\frac{1}{\ell n^2 n}\right)\right]} = e^{-\ell n\, n - \frac{1}{2} + o(1)}.$$

Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{n}$ et la série diverge d'après la règle des équivalents.

Ex. 2

Considérons le terme $a_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2}$; on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Pour que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ soit bornée il faut que $\sqrt[3]{P(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

D'où la forme nécessaire de P : $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Un calcul plus poussé donne : $a_n = n\left(1 + \dfrac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{4}} = n\left(1 + \dfrac{3}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = n + \dfrac{3}{4n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

De même $\sqrt[3]{P(n)} = n\left(1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = n\left(1 + \dfrac{a}{3n} + \left(\dfrac{b}{3} - \dfrac{a^2}{9}\right)\dfrac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$

$$= n + \frac{a}{3} + \left(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $u_n = -\dfrac{a}{3} + \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{b}{3} + \dfrac{a^2}{9}\right)\dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Si $a \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{a}{3} \neq 0$. Il faut donc $a = 0$ pour que la série converge.

Il reste alors $u_n = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{b}{3}\right)\dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Si $b \neq \dfrac{9}{4}$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{9}{4} - b\right)\dfrac{1}{3n}$, la série diverge. Si $b = \dfrac{9}{4}$, on a $u_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, la série converge.

Les polynômes cherchés sont donc : $P(x) = x^3 + \dfrac{9}{4}x + c \quad (c \in \mathbb{R})$.

Ex. 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n\, \ell n(1-x)$ est continue sur $[0, 1[$ et, lorsque x tend vers 1 : $f_n(x) \sim \ell n(1-x)$.
L'intégrabilité sur $[0, 1[$ de $x \mapsto \ell n(1-x)$ peut se déduire du calcul suivant :

$$\int_0^x \ell n(1-t)\,\mathrm{d}t = \int_{1-x}^1 \ell n\, t\,\mathrm{d}t = \left[t\,\ell n\, t - t\right]_{1-x}^1 = -x - (1-x)\,\ell n(1-x),$$

d'où on déduit $\lim\limits_{x\to1} \displaystyle\int_0^x \ell n(1-t)\,\mathrm{d}t = -1$.

Ceci assure que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ f_n est intégrable sur $[0, 1[$, donc que u_n existe avec de plus $u_0 = -1$.
Une intégration par parties donne pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\int_0^x t^n\,\ell n(1-t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1} - 1}{n+1}\,\ell n(1-t)\right]_0^x - \frac{1}{n+1}\int_0^x \frac{1 - t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t,$$

d'où en faisant tendre x vers 1 :

$$u_n = \frac{-1}{n+1}\int_0^1 \left(1+t+\dots+t^n\right)\mathrm{d}t = \frac{-1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}\right).$$

Il est classique que, lorsque $n \to +\infty$, $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \sim \ell n\, n$.

Ainsi $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-\ell n\, n}{n}$ et la série $\sum u_n$ diverge.

Ex. 4

C'est du cours!

En posant $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, la série $\sum v_n$ est convergente et l'hypothèse se lit $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Donc le théorème de comparaison logarithmique donne la convergence de $\sum u_n$.

Application : dans l'exemple proposé, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$, donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)} = 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par ailleurs $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc avec α tel que $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$, par exemple $\alpha = \dfrac{5}{4}$, on obtient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{5}{4}} < 0$

et d'après la question préliminaire, la série $\sum u_n$ converge.

Ex. 5

L'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$ permet d'écrire :

$$(1) \quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists a \in [1,+\infty[,\ \forall x \in [1,+\infty[,\ x \geqslant a \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant A.$$

Prenons $A = -1$.

Pour tout $x \geqslant a$, on a $\displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t \leqslant a - x$ donc $\ell n \dfrac{f(x)}{f(a)} \leqslant a - x$.

En posant $\lambda = f(a)e^a$, on obtient, pour tout $n \geqslant a$, $0 < f(n) \leqslant \dfrac{\lambda}{e^n}$.

La convergence de $\sum f(n)$ en résulte car $\sum e^{-n}$ est une série géométrique convergente.

Ex. 6

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ nous donne :

$$\left(\frac{\sqrt{u_1}}{1}+\frac{\sqrt{u_2}}{2^\alpha}+\dots+\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right)^2 \leqslant \left(1+\frac{1}{2^{2\alpha}}+\dots+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)(u_1+u_2+\dots+u_n).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_n \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ainsi $\sum v_n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée, elle est donc convergente.

Ex. 7

1) On sait que quel que soit $\alpha > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow n > (\ell n\, n)^\alpha$.

La série est donc définie et alternée à partir du rang n_0.

Il est clair que $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc la série n'est pas absolument convergente mais on a bien : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = 0$.

La fonction $f : x \mapsto x - (\ell n\, x)^\alpha$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et a pour dérivée f' telle que :

$$f'(x) = \frac{x - \alpha(\ell n\, x)^{\alpha-1}}{x}.$$

Il existe donc $a > 1$ tel que, pour tout $x \geqslant a$, on ait $f'(x) \leqslant 0$.

Puisque pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| = \dfrac{1}{f(n)}$, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que la suite $(|u_n|)_{n \geqslant n_1}$ soit décroissante.

Finalement, la série converge d'après le critère de Leibniz.

2) Notons $\quad a_n = \pi\sqrt{n^2 + k^2} - n\pi = \dfrac{\pi\, k^2}{\sqrt{n^2 + k^2} + n}$.

On obtient ainsi $\quad u_n = \sin(n\,\pi + a_n) = (-1)^n \sin a_n$.

Comme la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle, la suite $(\sin a_n)_{\mathbb{N}}$ a les mêmes qualités à partir d'un certain rang, le critère de Leibniz s'applique : la série $\sum u_n$ est convergente.

Notons que $|u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi\, k^2}{2n}$, $\quad$ donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

3) On a clairement affaire à une série alternée.

En écrivant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n} \times \dfrac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n}}$, on obtient le développement : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n} - \dfrac{1}{\ell n^2\, n} + o\left(\dfrac{1}{\ell n^2\, n}\right)$.

La série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n}$ converge d'après le critère de Leibniz.

Le développement précédent montre que la série de terme général $w_n = u_n - v_n$ est telle que $w_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\ell n^2\, n}$,

elle est donc de signe constant (négatif) à partir d'un certain rang et d'après le critère des équivalents,

elle est de même nature que la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{\ell n^2\, n}$ donc divergente.

En conclusion $\sum u_n$ diverge en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente.

4) Développons $\ell n \dfrac{n-1}{n} = \ell n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ à l'ordre 4 au sens fort :

$$\ell n \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

on en déduit $\quad \pi n^2 \ell n \dfrac{n-1}{n} = -\pi n - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, d'où :

$$u_n = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On déduit de ce calcul que $u_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3n}$, donc il s'agit d'une série alternée (à partir d'un certain rang) et

$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{3n}$ montre qu'elle n'est pas absolument convergente.

De plus $\sum u_n$ apparaît comme la somme d'une série convergente d'après le critère de Leibniz : $\sum (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3n}$,

et d'une série absolument convergente puisque $u_n - (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3n} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; elle est donc convergente.

5) Notons que $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ est définie pour $n \geqslant 2$.

Comme on a $\alpha > 0$, il vient $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

La série $\sum u_n$ est donc absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, procédons par un développement limité à deux termes :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \quad \text{et} \quad -\left[u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right] \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{2\alpha}}.$$

La série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ étant convergente d'après le critère de Leibniz (car $\alpha > 0$), la série $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ c'est-à-dire convergente si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

6) Puisque la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ vérifie le critère de Leibniz, on a pour tout $n \geqslant 2$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}\right| \leqslant \dfrac{1}{\ln n}$ donc $|u_n| \leqslant e^{-\ln n \ln \ln n}$. Avec $n^2 e^{-\ln n \ln \ln n} = e^{2\ln n - \ln n \ln \ln n}$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ donc $\sum u_n$ converge d'après le critère de Riemann.

Ex. 8

1) Posons $u_n = \dfrac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.

Décomposons $F(X) = \dfrac{X}{X^4 + X^2 + 1}$ en éléments simples : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = \dfrac{1}{2(n^2 - n + 1)} - \dfrac{1}{2(n^2 + n + 1)}$ c'est-à-dire $u_n = h(n) - h(n+1)$ où on a posé $h(n) = \dfrac{1}{2(n^2 - n + 1)}$.

On reconnaît une série télescopique et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = h(0) - h(n+1)$.

Il en résulte que $\sum u_n$ est convergente avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = h(0) - \lim_{n\to+\infty} h(n) = \frac{1}{2}$.

2) Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ et pour $n \geqslant 1$, posons $h(n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On a ainsi pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = h(n-1) - 2h(n) + h(n+1)$, on reconnaît une série téléscopique généralisée.

Formons les sommes partielles : $U_n = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} u_j = \sum_{j=2}^{n} h(j-1) + \sum_{j=2}^{n} h(j+1) - 2\sum_{j=2}^{n} h(j)$,

soit en translatant les indices de sommation : $U_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} h(j) + \sum_{j=3}^{n+1} h(j) - 2\sum_{j=2}^{n} h(j)$,

et après simplification : $U_n = h(1) - h(2) + h(n+1) - h(n)$.

Avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h(n) = 0$, il en résulte que la série est convergente avec $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = h(1) - h(2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarque : on pouvait aussi effectuer ce calcul en remarquant que $u_n = k(n) - k(n+1)$ avec :

$$k(n) = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \ln\left(\cos\left(2^{-n}a\right)\right)$. Pour que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ soit définie il est nécessaire et suffisant que $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Si $a = 0$, on a affaire à la série nulle. On suppose maintenant $a \neq 0$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{a^2}{2^{2n+1}}$ donc, la série géométrique $\sum \frac{1}{2^{2n+1}}$ étant convergente, la règle des équivalents donne la convergence de $\sum u_n$.

Notons $S(a)$ la somme, la fonction S ainsi définie est évidemment paire et on peut donc se limiter à $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

En remarquant que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$, il vient $u_n = \ln\left(\sin\frac{a}{2^{n-1}}\right) - \ln\left(\sin\frac{a}{2^n}\right) - \ln 2$

soit $u_n = \ln\left(2^{n-1}\sin\frac{a}{2^{n-1}}\right) - \ln\left(2^n \sin\frac{a}{2^n}\right)$.

On reconnaît ainsi une série télescopique, et on obtient : $\sum_{k=0}^{n} u_k = \ln\frac{\sin 2a}{2} - \ln\left(2^n \sin\frac{a}{2^n}\right)$.

Donc, avec $\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{a}{2^n} = a$, il vient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ln\left(\frac{\sin 2a}{2a}\right)$.

Remarquons enfin que la fonction $f : a \mapsto \frac{\sin 2a}{2a}$ étant paire et prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = 1$, la formule trouvée est valable sur tout l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ex. 9

En remarquant que $\frac{1}{n-\frac{1}{2}} = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)$, on obtient $\frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k^2}$.

La conclusion résulte alors de $\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2-\frac{1}{4}} - \frac{1}{k^2} > 0$.

Niveau 2

Ex. 10

La suite $(y_n)_{\mathbb{N}}$ est définie et positive (par récurrence).

Établissons la propriété (H_n) : $y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant 1$.

Sachant que (H_0) : $y_0 = x_0 \leqslant 1$ est vraie, supposons acquise la propriété (H_n).

Calculons $1 - y_{n+1} = \frac{(1-x_{n+1})(1-y_n)}{1+x_{n+1}y_n}$ et $y_{n+1} - y_n = \frac{x_{n+1}(1-y_n^2)}{1+x_{n+1}y_n}$.

Ayant supposé que (H_n) est vraie, il vient : $1 - y_{n+1} \geqslant 0$ et $y_{n+1} - y_n \geqslant 0$,

d'où $y_n \leqslant y_{n+1} \leqslant 1$ ce qui donne (H_{n+1}).

Ainsi la suite $(y_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1, elle converge donc.

Minorons l'expression : $y_{n+1} - y_n = \frac{x_{n+1}(1-y_n^2)}{1+x_{n+1}y_n} \geqslant \frac{1}{2}\frac{(1-y_n^2)}{1+y_n} = \frac{1}{2}(1-y_n) \geqslant 0$.

Comme la suite $(y_n)_{\mathbb{N}}$ converge, la série de terme général $y_{n+1} - y_n$ converge,
et $0 \leqslant 1 - y_n \leqslant 2(y_{n+1} - y_n)$ prouve par comparaison que la série de terme général $1 - y_n$ converge.

Ex. 11

Sachant que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroisante sur $]0, +\infty[$, on obtient :

$$\text{pour tout } k \geqslant 1, \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \textbf{(1)} \quad \text{et pour tout } k \geqslant 2, \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \textbf{(2)}$$

Remarque : l'inégalité **(2)** reste vraie pour $k = 1$ car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (voir chapitre 6).

En sommant les inégalités **(1)** et **(2)**, il vient : $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}}$, d'où :

$$\int_1^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2\sqrt{n} - 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

On a donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$.

Si $a \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant 1$, et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $0 < a < 1$, on a $n^2 u_n = \exp\left[2 \ln n - \left(2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})\right) |\ln a|\right]$, donc : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n = 0$ ou $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

et la série $\sum u_n$ converge d'après le critère de Riemann.

Ex. 12

On a pour $n \geqslant 1$, $10^{p-1} \leqslant n \leqslant 10^p - 1$ donc $n < 10^p$, $n^{\frac{1}{p}} < 10$ et $u_n > 0$.
Ainsi, la série $\sum u_n$ est à termes positifs.

Pour $p \geqslant 1$, posons $v_p = \displaystyle\sum_{10^{p-1} \leqslant n \leqslant 10^p - 1} u_n$: $\sum v_p$ est déduite de $\sum u_n$ par sommation par tranches.

On a $\quad v_p \geqslant (10^p - 10^{p-1}) \left[10 - (10^p - 1)^{\frac{1}{p}}\right] = 9 \cdot 10^p \left[1 - (1 - 10^{-p})^{\frac{1}{p}}\right].$

Posons $\quad w_p = 9 \cdot 10^p \left[1 - (1 - 10^{-p})^{\frac{1}{p}}\right]$. Lorsque p tend vers $+\infty$, on a :

$$1 - (1 - 10^{-p})^{\frac{1}{p}} = 1 - e^{\frac{1}{p}\ln(1 - 10^{-p})} = \frac{10^{-p}}{p} + o\left(\frac{10^{-p}}{p}\right) \quad \text{donc} \quad w_p \underset{+\infty}{\sim} \frac{9}{p}.$$

La série $\sum w_p$ (à termes positifs) est donc divergente et puisque $v_p \geqslant w_p$, il en est de même de $\sum v_p$.
La suite des sommes partielles de $\sum v_p$ est extraite de la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ et elle tend vers $+\infty$, donc $\sum u_n$ diverge. (Voir le complément de cours sur le groupement des termes.)

Ex. 13

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \quad , \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, on obtient :

$$V_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} \sum_{k=1}^{p} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k \sum_{p=k}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{k=1}^{n} k u_k \sum_{p=k}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right),$$

donc $\quad V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right) = U_n - n v_n.$

- Si la série $\sum u_n$ converge, l'inégalité $0 \leqslant V_n \leqslant U_n \leqslant U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$ prouve que $\sum v_n$, série à termes positifs, est convergente. De $nv_n = U_n - V_n$, on déduit alors que la suite (nv_n) converge, soit λ sa limite.

Si $\lambda \neq 0$, alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$ ce qui est contradictoire ($\sum v_n$ converge) donc $\lambda = 0$ et $V = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

- Si la série $\sum u_n$ diverge et la série $\sum v_n$ converge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = V$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = +\infty$, ce qui est contradictoire avec ($\sum v_n$ converge). Donc, si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge aussi.

Ex. 14

1) Étude du cas particulier : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$ avec $2 - \alpha > 1$ donc $\sum v_n$ converge.

Pour $\alpha = 1$, $\sum u_n$ diverge et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sum v_n$ diverge.

Pour $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge et :

si $1 < \alpha < 2$, $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$ avec $2 - \alpha < 1$ donc $\sum v_n$ diverge,

si $\alpha = 2$, $v_n = \dfrac{1}{2}$ donc $\sum v_n$ diverge,

si $\alpha > 2$, $v_n \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc $\sum v_n$ diverge.

L'étude de cet exemple montre que l'on ne peut rien dire de $\sum v_n$ lorsque $\sum u_n$ diverge.

2) Montrons que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ diverge.

Supposons $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes.

De $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$ on tire $u_n v_n = \dfrac{1 - v_n}{n^2}$, d'où :

$$\sqrt{u_n v_n} = \frac{\sqrt{1 - v_n}}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ (car } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0\text{) donc } \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ diverge.}$$

Or $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$ montre, d'après le théorème **11**, que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est convergente.

On a ainsi obtenu une contradiction, ce qui permet de conclure à la proposition annoncée.

Ex. 15

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la somme de la série de terme général $a_k(n) = \dfrac{n}{k^2} e^{\frac{n}{k}}$ défini à partir du rang n.

Comme $a_k(n) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{k^2}$ la série est convergente. Comparons u_n à une intégrale.

La fonction $\varphi : t \mapsto n\dfrac{1}{t^2}e^{\frac{n}{t}}$, étant continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, on dispose de l'encadrement :

$$\int_k^{k+1} n\frac{e^{\frac{n}{t}}}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{n}{k^2}e^{\frac{n}{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} n\frac{e^{\frac{n}{t}}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} n\frac{e^{\frac{n}{t}}}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-e^{\frac{n}{t}}\right]_n^{+\infty} = e - 1$ existe.

D'où
$$\int_n^{+\infty} n\frac{e^{\frac{n}{t}}}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{n}{k^2}e^{\frac{n}{k}} \leqslant \frac{e}{n}+\int_n^{+\infty} n\frac{e^{\frac{n}{t}}}{t^2}\mathrm{d}t$$

puis $\quad e-1 \leqslant u_n \leqslant e-1+\dfrac{e}{n}$. $\quad$ Ainsi $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e-1$.

Ex. 16

Le critère de Cauchy appliqué à la série convergente $\sum \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ montre que la suite de terme général $\quad a_n = \displaystyle\sum_{k=E\left(\frac{n}{2}\right)+1}^{n} \frac{u_k}{k^\alpha}$

converge vers 0. Envisageons alors deux cas selon le signe de α.

1) Si $\alpha \geqslant 0$, $\quad a_n \geqslant \left[n-E\left(\dfrac{n}{2}\right)\right]\dfrac{u_n}{n^\alpha} > 0\quad$ donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\left[n-E\left(\dfrac{n}{2}\right)\right]\dfrac{u_n}{n^\alpha} = 0.$

   On a, par ailleurs, $\quad n-E\left(\dfrac{n}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2} \quad$ (car $\quad n-E\left(\dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{n}{2}$ ou $\dfrac{n+1}{2}$), donc :
$$\left[n-E\left(\frac{n}{2}\right)\right]\frac{u_n}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}n^{1-\alpha}u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}u_n = 0.$$

2) Si $\alpha < 0$, $\quad a_n \geqslant \left[n-E\left(\dfrac{n}{2}\right)\right]\dfrac{2^\alpha}{n^\alpha}u_n > 0 \quad$ et on conclut de la même manière.

Ex. 17

1) Avec $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$, on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1-\dfrac{\beta}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\beta-\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   Si $\beta-\alpha \neq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est du signe de $\beta-\alpha$.

   Lorsque $\alpha < 1$, prenons $\beta = 1$, alors $\sum v_n$ est divergente et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geqslant n_0$ montre que $\sum u_n$ diverge également.

   Lorsque $\alpha > 1$, prenons $\beta = \dfrac{1+\alpha}{2}$, on a alors $1 < \beta < \alpha$ donc $\sum v_n$ converge et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geqslant n_0$ montre que $\sum u_n$ converge également.

2) Avec $u_n = \dfrac{1}{n\,\ell n^\beta n}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1-\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\left(\dfrac{\ell n(n+1)}{\ell n\, n}\right)^{-\beta}$.

   et $\ell n(n+1) = \ell n\, n+\ell n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ell n\, n+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donne $\dfrac{\ell n(n+1)}{\ell n\, n} = 1+\dfrac{1}{n\,\ell n\, n}+o\left(\dfrac{1}{n\,\ell n\, n}\right) = 1+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$,

   donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   En conséquence, lorsque $\alpha = 1$, on peut aussi bien avoir affaire à une série convergente (c'est le cas, par exemple, avec $\beta = 2$) qu'à une série divergente (c'est le cas, par exemple, avec $\beta = 1$).

3) On a ici $\quad \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1-\dfrac{1}{6n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. D'après le résultat précédent $\sum u_n$ diverge.

Ex. 18

La suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est définie car u_n est le reste d'ordre n d'une série alternée vérifiant le critère de Leibniz.

On sait aussi que u_n est du signe de son premier terme : $\quad u_n = (-1)^n|u_n| \quad$ et que $\quad |u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

En conséquence, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Calculons :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}+u_{N+1}\right)\\ &= Nu_{N+1}+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}\left(\sum_{n=1}^{k}1\right)\\ &= Nu_{N+1}+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}.\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} Nu_{N+1}=0$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln 2.$

Ex. 19

On a vu (voir exemple 11) que pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\sum\frac{x^n}{n!}$ est convergente et a pour somme e^x.

Posons $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$, $R'_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$, il vient : $u_n=(e-R_n)\left(\frac{1}{e}-R'_n\right)-1=-\frac{1}{e}R_n-eR'_n+R_nR'_n$.

Remarquons que pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a $\frac{1}{(n+k)!}\leqslant\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{k!}$. Il en résulte $0<R_n\leqslant\frac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ c'est-à-dire

$0<R_n\leqslant\frac{e}{n!}$, donc $\left|R'_n\right|\leqslant R_n\leqslant\frac{e}{n!}$, et pour $n\geqslant 2$, $\left|R_nR'_n\right|\leqslant R_n\leqslant\frac{e}{n!}$.

Ainsi les trois séries $\sum R_n$, $\sum R'_n$ et $\sum R_nR'_n$ sont absolument convergentes et il en est de même pour $\sum u_n$.

Ex. 20

Posons $u_n(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch} nx\operatorname{ch}(n+1)x}$. La fonction u_n ainsi définie est paire ; on peut donc se limiter à $x\geqslant 0$.

Pour $x=0$, on a $u_n(0)=1$ donc $\sum u_n(0)$ diverge grossièrement.

Pour $x>0$, lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $u_n(x)\sim 4e^{-(2n+1)x}$ et la série géométrique $\sum e^{-2nx}$ étant convergente, la règle des équivalents donne qu'il en est de même pour $\sum u_n(x)$.

En posant $t=e^{2nx}$, on obtient $u_n(x)=\dfrac{4te^{-x}}{(t+1)(t+e^{-2x})}$, et une décomposition en éléments simples donne :

$u_n(x)=\dfrac{2}{\operatorname{sh}x}\cdot\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{2e^{-2x}}{\operatorname{sh}x}\cdot\dfrac{1}{t+e^{-2x}}$, d'où enfin $u_n(x)=\dfrac{2}{\operatorname{sh}x}\left[\dfrac{1}{e^{2nx}+1}-\dfrac{1}{e^{2(n+1)x}+1}\right]$.

Pour $x>0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{2(n+1)x}=+\infty$ d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=\frac{2}{\operatorname{sh}x}\left(\frac{1}{2}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{2(n+1)x}+1}\right)=\frac{1}{\operatorname{sh}x}$.

Pour $x<0$, d'après la parité des u_n, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(-x)=-\frac{1}{\operatorname{sh}x}$.

Ex. 21

On reconnaît une intégrale de Wallis : $I_n=\displaystyle\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,\mathrm{d}x$.

La formule de récurrence $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$ conduit à $I_n=\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ d'où, avec la formule de Stirling :

$$I_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}\text{ et }u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha>\frac{1}{2}$.

Ex. 22

La fonction $\ln^2$ étant croissante, on obtient : $\int_1^n \ln^2 x\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k \leqslant \int_1^{n+1} \ln^2 x\,\mathrm{d}x.$

Calculons $\int_1^n \ln^2 x\,\mathrm{d}x = n\ln^2 n - 2n\ln n + 2n - 2$, on en déduit $\int_1^n \ln^2 x\,\mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} \int_1^{n+1} \ln^2 x\,\mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2 n$,

d'où : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}$. Finalement, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Ex. 23

Formons $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{3n} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

Pour $\alpha > 1$, la série $\sum \dfrac{1}{k^\alpha}$ converge, donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$: $\sum u_n$ converge avec $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 0$.

Pour $\alpha \leqslant 0$, $U_n \geqslant 2n$: $\sum u_n$ diverge.

Pour $0 < \alpha < 1$, $U_n \geqslant \dfrac{2n}{(3n)^\alpha}$ donc $U_n \geqslant \dfrac{2}{3} n^{1-\alpha}$ et $\sum u_n$ diverge.

Pour $\alpha = 1$, avec $\int_k^{k+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ il vient $\ln \dfrac{3n+1}{n+1} \leqslant U_n \leqslant \ln 3$: $\sum u_n$ converge avec $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln 3$.

Ex. 24

La fonction $f : x \mapsto e^x + x$ est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On a donc $x_n = f^{-1}(n)$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

$n = e^{x_n} + x_n$ donne $n \underset{+\infty}{\sim} e^{x_n}$ donc $x_n = \ln n + o(\ln n)$, alors :

$$x_n = \ln(n - x_n) = \ln\big(n - \ln n + o(\ln n)\big) = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

puis $x_n = \ln n + \ln\left[1 - \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{\ln n}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)\right] = \ln n - \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Finalement $u_n = (1-a)\ln n - (1+b)\dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Ainsi $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = 1$ et $b = -1$.

Ex. 25

Soit $u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$, on a $u_n = u_{n-1}\dfrac{\sqrt{n-1}}{1+\sqrt{n}}$ donc $u_n = u_{n-1}\sqrt{n-1} - u_n\sqrt{n}$, $(n \geqslant 2)$.

On pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, il vient $U_n = 1 - u_n\sqrt{n}$, $(n \geqslant 1)$.

Avec $\ln\left(u_n\sqrt{n}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$, la divergence de la série $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ donne $\lim_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = 0$

donc :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = 1.$$

Ex. 26

Dans le cas $v_n \geqslant u_n$, on a $v_n \leqslant \dfrac{1}{n^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}$, d'où $\forall n \geqslant 1$, $v_n \leqslant u_n + \dfrac{1}{n^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}$ et $\sum v_n$ est convergente.

Ex. 27

De $\forall p \in \mathbb{N},\quad S_{2^{p+1}} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{2^p}\right) S_{2^p}$, on déduit $S_{2^n} \leqslant \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right) S_1$.

La série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$ étant convergente, il existe $A = \displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N},\quad S_{2^n} \leqslant AS_1$.

La suite $(S_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante et, pour tout n, il existe p tel que $2^p \geqslant n$ donc $S_n \leqslant S_{2^p} \leqslant AS_1$. Il en résulte que $\sum u_n$ est convergente.

Ex. 28

Avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et $u_n = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$.

Si $\dfrac{S_{n-1}}{S_n}$ ne tend pas vers 1, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $\dfrac{S_{n-1}}{S_n}$ tend vers 1, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln\dfrac{S_{n-1}}{S_n} = \ln\dfrac{S_n}{S_{n-1}}$. Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\dfrac{S_k}{S_{k-1}} = \ln\dfrac{S_n}{S_0}$ tend vers $+\infty$, donc $\sum u_n$ diverge.

Ex. 29

Si $\sum u_n$ converge, u_n tend vers 0 et, à partir d'un certain rang, $0 < u_n^2 \leqslant u_n$ donc $\sum u_n^2$ converge.

Alors $\ln\cos u_n \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$ donne que $\sum \ln\cos u_n$ converge et puisque $\ln\cos u_n = \ln a_n - \ln a_{n+1}$, la suite $(\ln a_n)_{\mathbb{N}}$ converge. C'est contradictoire donc $\sum u_n$ diverge.

Ex. 30

Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est nulle donc $\sum u_n$ converge.

Si $x \in \mathbb{R}\setminus \pi\,\mathbb{Z}$, à partir d'un certain rang n_0, on a $0 < \left|\dfrac{x}{n}\right| < \pi$,

- pour $x > 0$, la série est de signe constant à partir de n_0,
- pour $x < 0$, la série est alternée à partir de n_0.

Avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|$, on voit que pour $|x| < 1$ la série est absolument convergente et, pour $|x| > 1$, u_n ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Dans le cas où $|x| = 1$, formons $\ln|u_n| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left[k\sin\dfrac{1}{k}\right]$. Avec $\ln\left[k\sin\dfrac{1}{k}\right] \sim -\dfrac{1}{6k^2}$, on voit que la série $\sum \ln\left[k\sin\dfrac{1}{k}\right]$ converge, donc $\ln|u_n|$ a une limite réelle ℓ et $|u_n|$ tend vers $e^{\ell} \neq 0$.

Il en résulte que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Ex. 31

Posons $v_p = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^{p+1}}{p^{\alpha}}\right)$, on obtient : $v_p = \dfrac{(-1)^{p+1}}{p^{\alpha}} - \dfrac{1}{2p^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{p^{2\alpha}}\right)$.

$\sum v_p$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{p^{2\alpha}}$ donc convergente si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

- Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
- Si $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Niveau 3

Ex. 32

1) Écrivons $v_n = (R_{n-1} - R_n)R_{n-1}^{-\alpha}$, alors la décroissance de $x \mapsto x^{-\alpha}$, ($\alpha > 0$), donne :

$$(R_{n-1} - R_n)R_{n-1}^{-\alpha} \leqslant \int_{R_n}^{R_{n-1}} x^{-\alpha}\mathrm{d}x \quad \text{donc} \quad v_n \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\right).$$

Puisque $1 - \alpha > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, la série de terme général $v_n' = R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}$ est convergente, $\left(\sum_{k=0}^{n} v'(k) = R_{-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\right.$ tend vers $R_{-1}^{1-\alpha}$ quand n tend vers $+\infty\Big)$, et l'inégalité $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{1-\alpha}v_n'$ donne la convergence de $\sum v_n$ par application du premier théorème de comparaison des séries à termes positifs (théorème **11**).

2) On a de même $\quad w_n = (R_{n-1} - R_n)\dfrac{1}{R_n} \geqslant \displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, donc :

$$w_n \geqslant w_n' \quad \text{avec} \quad w_n' = \ell n\, R_{n-1} - \ell n\, R_n\,.$$

La série $\sum w_n'$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} \ell n\, R_n = -\infty$ donc $\sum w_n$ diverge (théorème **11**).

Ex. 33

(u_n) étant décroissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(p^{n+1} - p^n\right) u_{p^{n+1}} \leqslant u_{p^n+1} + u_{p^n+2} + \cdots + u_{p^{n+1}} \leqslant \left(p^{n+1} - p^n\right) u_{p^n},$$

d'où, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(p^{n+1} - p^n\right) u_{p^{n+1}} \leqslant \sum_{k=2}^{p^{N+1}} u_k \leqslant \sum_{n=0}^{N}\left(p^{n+1} - p^n\right) u_{p^n}\,.$

Posons, pour $n \geqslant 2$, $\quad U_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k \quad$ et $\quad V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p^k u_{p^k}\,.$

La double inégalité précédente s'écrit alors $\quad \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)(V_{N+1} - u_1) \leqslant U_{p^{N+1}} \leqslant (p-1)V_N.$

Si $\sum u_n$ converge, on déduit de $\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)(V_{N+1} - u_1) \leqslant U_{p^{N+1}}$ que la suite (V_n) est majorée et donc que $\sum p^n u_{p^n}$ converge.

Si $\sum u_n$ diverge alors $\lim_{N\to+\infty} U_{p^{N+1}} = +\infty$, et on déduit de $U_{p^{N+1}} \leqslant (p-1)V_N$ que $\lim_{N\to+\infty} V_N = +\infty$, donc $\sum p^n u_{p^n}$ diverge.

Application : pour $u_n = \dfrac{1}{n(\ell n\, n)^\lambda}$ $\quad$ on a $\quad p^n u_{p^n} = \dfrac{1}{n^\lambda(\ell n\, p)^\lambda}$ donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \dfrac{1}{n^\lambda}$ converge, c'est-à-dire $\lambda > 1$.

Ex. 34

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\quad U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \quad , \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k\,,$

et lorsque ces séries sont convergentes, $U = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \quad , \quad V = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k\,.$

On a alors $\quad V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} a_k u_k \quad$ avec $\quad a_k = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n \\ p\leqslant k\leqslant 2p-1}} \frac{1}{p} = \sum_{p=1+E\left(\frac{k}{2}\right)}^{\inf(k,n)} \frac{1}{p}\,.$

1) De $\inf(k,n) \leqslant k$, on déduit :

$$a_k \leqslant \sum_{p=1+E\left(\frac{k}{2}\right)}^{k} \frac{1}{p} \leqslant \frac{k-E\left(\dfrac{k}{2}\right)}{1+E\left(\dfrac{k}{2}\right)} \quad \text{donc} \quad a_k \leqslant \frac{k}{1+E\left(\dfrac{k}{2}\right)} \leqslant 2.$$

Il en résulte $\quad V_n \leqslant 2U_{2n-1}$.

Si $\sum u_n$ est convergente, on a $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ U_{2n-1} \leqslant U \quad$ donc $\quad V_n \leqslant 2U$.

Puisque la suite de ses sommes partielles est majorée, la série $\sum v_n$, à termes réels positifs, est convergente.

2) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\quad a_k = \displaystyle\sum_{p=1+E\left(\frac{k}{2}\right)}^{k} \frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{k}\left(k - E\left(\frac{k}{2}\right)\right)$ donc $a_k \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Tenant compte de $\quad V_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k u_k$, on obtient $V_n \geqslant \dfrac{1}{2}U_n$, c'est-à-dire $\quad U_n \leqslant 2V_n$.

Comme au 1), il en résulte que la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

3) On déduit de 1) et 2) que les deux séries sont de même nature.

Ex. 35

On a $\quad \dfrac{1}{n \ln n \ln(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln n} - \dfrac{1}{\ln(n+1)}$, donc d'après la règle des équivalents,

$\sum v_n$ est de même nature que $\sum w_n$ avec $\quad w_n = \left(\dfrac{1}{\ln n} - \dfrac{1}{\ln(n+1)}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \ln(k+1)$ (il s'agit bien sûr de séries à termes positifs).

Formons $\quad W_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n} w_p = \sum_{p=2}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{\ln p} - \frac{1}{\ln(p+1)}\right) u_k \ln(k+1)$

$$W_n = u_1 \ln 2 \sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{\ln p} - \frac{1}{\ln(p+1)}\right) + \sum_{k=2}^{n} u_k \ln(k+1) \sum_{p=k}^{n}\left(\frac{1}{\ln p} - \frac{1}{\ln(p+1)}\right).$$

L'introduction de $\dfrac{1}{\ln n} - \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ trouve sa justification dans ce calcul, car on a :

$$\sum_{p=k}^{n}\left(\frac{1}{\ln p} - \frac{1}{\ln(p+1)}\right) = \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

On a donc $\quad W_n = u_1 \ln 2\left(\dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln(n+1)}\right) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k \ln(k+1)\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$,

et il en résulte puisque les u_n sont positifs $\quad \forall n \geqslant 2,\ W_n \leqslant u_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k \frac{\ln(k+1)}{\ln k}$.

Or $\quad u_k \dfrac{\ln(k+1)}{\ln k} \underset{+\infty}{\sim} u_k$, donc $\quad \sum u_k \dfrac{\ln(k+1)}{\ln k} \quad$ converge (règle des équivalents),

et avec $\quad S = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k \frac{\ln(k+1)}{\ln k} \quad$ on obtient $\quad \forall n \geqslant 2,\ W_n \leqslant u_1 + S$.

Puisque la suite de ses sommes partielles est majorée, la série $\sum w_n$, à termes positifs, est convergente et il en est de même pour $\sum v_n$.

Ex. 36

Étudions la suite de terme général $P_n = \prod_{p=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}}\right)$.

On a $\frac{P_n}{P_{n-1}} = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ et $\ell n\,\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Écrivons $\ell n\,\frac{P_n}{P_{n-1}} = -\frac{1}{2n} + x_n$ où $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Les séries $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ sont convergentes, donc $\sum x_n$ aussi.

Montrons alors que la suite $Q_n = P_n\sqrt{n}$ est convergente.

Formons $\ell n\,\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \ell n\,\frac{P_n}{P_{n-1}} - \frac{1}{2}\,\ell n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n} + x_n + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

donc $\ell n\,Q_n - \ell n\,Q_{n-1} = x_n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série convergente.

Comme $\sum_{n=2}^{N} \ell n\,Q_n - \ell n\,Q_{n-1} = \ell n\,Q_N - \ell n\,Q_1$, la suite $n \mapsto \ell n\,Q_n$ converge :

$$\lim_{n\to+\infty} \ell n\,Q_n = \mu \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} Q_n = e^{\mu}.$$

Ainsi $P_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\mu}}{\sqrt{n}}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\mu}}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$.

La série $\sum u_n$ est converge si et seulement si $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Ex. 37

Soit $f\ :\ x \mapsto \frac{\sin\sqrt{x}}{x^{\alpha}}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2x^{\alpha+\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha\sin\sqrt{x}}{x^{\alpha+1}}$.

Compte tenu de $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ et $\alpha + 1 > 1$, la majoration : $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2x^{\alpha+\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ donne que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$. Le théorème **14** s'applique et donne que la série de terme général $v_n = \int_{n-1}^{n} \frac{\sin\sqrt{t}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t - u_n$ est absolument convergente.

Formons alors $S_n = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\sin\sqrt{t}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = \int_{1}^{n} \frac{\sin\sqrt{t}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$, le changement de variable $x = \sqrt{t}$ donne $S_n = 2\int_{1}^{\sqrt{n}} \frac{\sin x}{x^{2\alpha-1}}\mathrm{d}x$, puis une intégration par parties :

$$S_n = 2\left[-\frac{\cos x}{x^{2\alpha-1}}\right]_1^{\sqrt{n}} - 2(2\alpha-1)\int_{1}^{\sqrt{n}} \frac{\cos x}{x^{2\alpha}}\mathrm{d}x$$

$$S_n = 2\cos 1 - \frac{2\cos\sqrt{n}}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}} - 2(2\alpha-1)\int_{1}^{\sqrt{n}} \frac{\cos x}{x^{2\alpha}}\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de $2\alpha > 1$, la fonction $g\ :\ x \mapsto \frac{\cos x}{x^{2\alpha}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $|g(x)| \leqslant \frac{1}{x^{2\alpha}}$), il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe avec $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2\cos 1 - 2(2\alpha - 1)\int_{[1,+\infty[} g$.

On a ainsi prouvé la convergence de la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} \frac{\sin\sqrt{t}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$

et finalement $u_n = w_n - v_n$ est convergente.

Ex. 38

1) Avec $v_n = \dfrac{1}{n(\ell n\, n)^{a}}$, on obtient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{a}{n\,\ell n\, n} + o\left(\dfrac{1}{n\,\ell n\, n}\right)$.

Si ℓ est réel, on pose $a = \ell n\,\ell$. On a alors $\ell n\left(n\,\ell n\,\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a}{\ell n\, n}$ donc $\ell n\left(n\,\ell n\,\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \dfrac{a}{\ell n\, n} + o\left(\dfrac{1}{n\,\ell n\, n}\right)$

puis $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{a}{n\,\ell n\, n} + o\left(\dfrac{1}{n\,\ell n\, n}\right)$. En conséquence : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\alpha - a}{n\,\ell n\, n} + o\left(\dfrac{1}{n\,\ell n\, n}\right)$.

Dans le cas $\ell > e$, on choisit α tel que $1 < \alpha < a$ et on conclut avec le théorème de comparaison logarithmique.

En notant que $\left(n\,\ell n\,\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)^{\ell n\, n} \geqslant \left(n\,\ell n\,\dfrac{u'_n}{u'_{n+1}}\right)^{\ell n\, n}$ implique $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant \dfrac{u'_n}{u'_{n+1}}$, on étend la conclusion précédente au cas où $\ell = +\infty$.

Dans le cas $\ell < e$, on choisit $\alpha = 1$ et on conclut de même.

2) Avec $u_n = \dfrac{1}{n\,\ell n\, n(\ell n\,\ell n\, n)^{\beta}}$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\,\ell n\,\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)^{\ell n\, n} = \ell$ quel que soit le réel β.

Ex. 39

La série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n}$ vérifie le critère de Leibniz. Alors $\sum u_n$ est elle même alternée et : $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{\ell n\, n}$.

On a $|u_n| = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-n}}{\ell n\, k}$ et en posant $f(x) = \dfrac{1}{\ell n\, x}$ il vient :

$$|u_n| - |u_{n+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} f(n+2k) - 2f(n+2k+1) + f(n+2k+2).$$

En vérifiant que f est convexe sur $]1, +\infty[$ on en déduit que $|u_n| - |u_{n+1}| \geqslant 0$.

Donc la série $\sum u_n$ vérifie, elle aussi, le critère de Leibniz.

Ex. 40

On commence par montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

En remarquant que $\dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{2k}\,dx$, il vient : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$,

puis $0 < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{2n+2}\,dx$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

De plus on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4} - R_n$ avec $R_n = (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$.

Il vient ainsi $u_n = \ell n\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - R_n\right)\right]$ et avec un développement limité à l'ordre 2 : $u_n = -2R_n + o\left(R_n^2\right)$.

Avec $R_n = (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$, on vérifie que la série alternée $\sum R_n$ converge d'après le critère de Leibniz.

D'autre part $|R_n| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ donne $R_n^2 \leqslant \dfrac{1}{4n^2}$ ce qui prouve que $\sum R_n^2$ est convergente.

Finalement $\sum u_n$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.

Ex. 41

1) Avec $e^{i\theta} \neq 1$, on a $A_n = \dfrac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$, d'où $|A_n| = \left|\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|}$. On pose $M = \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|}$.

2) En remplaçant $e^{ik\theta}$ par $A_k - A_{k-1}$ dans $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k^\alpha}$, on obtient la formule annoncée.

Puisque $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$, la série $\sum \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ est convergente et la majoration

$\left|A_k\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right| \leq M\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ montre que la série $\sum A_k\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ converge également.

Avec $\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{(n+1)^\alpha} = 0$, il vient l'existence de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = -1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$, donc $\sum u_n$ est convergente. Avec $|u_n| = \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

3) On a $v_n = \mathrm{Re}\, u_n$ et $w_n = \mathrm{Im}\, u_n$ donc $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes et pour $\alpha > 1$ elles sont absolument convergentes. Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, pour $0 < \alpha \leq 1$, écrivons :

$$\left|\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}\right| \geq \frac{\cos^2 n\theta}{n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\cos 2n\theta}{2n^\alpha} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}\right| \geq \frac{\sin^2 n\theta}{n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\cos 2n\theta}{2n^\alpha}.$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente et $\sum \frac{\cos 2n\theta}{2n^\alpha}$ convergente, on en déduit que $\sum |v_n|$ et $\sum |w_n|$ divergent.

Ex. 42

On développe : $u_n = \frac{\cos n}{2n^{\alpha/2}} - \frac{\cos^2 n}{8n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{\cos^2 n}{n^{3\alpha/2}}\right)$, donc $u_n = \frac{\cos n}{2n^{\alpha/2}} - \frac{\cos 2n}{16n^{3\alpha/2}} - \frac{1}{16n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$.

Les deux séries $\sum \frac{\cos n}{n^{\alpha/2}}$ et $\sum \frac{\cos 2n}{n^{3\alpha/2}}$ étant convergentes, $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$ donc elle converge si et seulement si $\alpha > \frac{2}{3}$.

CHAPITRE

3 Suites et séries de fonctions

Notations

Dans tout ce chapitre, on convient que :

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
- I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point,
- $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{K}$ donc $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^I$,
- $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ est le sous-espace de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ formé des applications bornées.

A. Convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

1. Suites de fonctions : modes de convergence

Définition 1

Suite de fonctions

Une **suite de fonctions** définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Définition 2

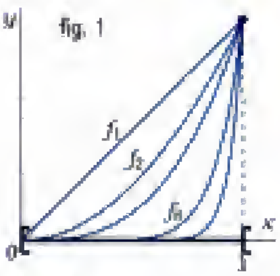
Convergence simple d'une suite de fonctions

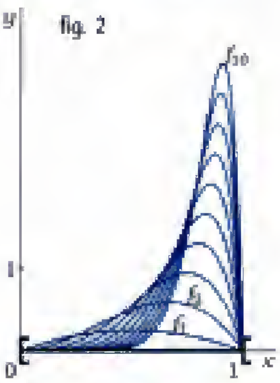
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge simplement sur** I si et seulement si, pour tout $x \in I$, la suite $\left(f_n(x)\right)_{\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.

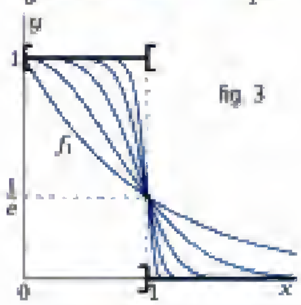
On appelle **limite simple** de la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$, ✎(1) la fonction f de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ définie par :

$$f : I \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

✎(1) On dit usuellement que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction f.







Exemples

1) $I = [0, 1]$, $f_n : x \mapsto x^n$ (fig. 1).

La suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in [0, 1[, \ f(1) = 1.$$

2) $I = [0, 1[$, $f_n : x \mapsto n^2 x^n (1 - x)$ (fig. 2).

Pour tout $x \in [0, 1[$, d'après les règles de comparaison des fonctions puissances et exponentielles, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 x^n = 0$.

On en déduit que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction nulle (de $\mathcal{F}([0, 1[, \mathbb{R})$).

3) $I = [0, +\infty[$, $f_n : x \mapsto e^{-x^n}$ (fig. 3).

Pour $x \in [0, 1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$.

La suite $(f_n(1))_{\mathbb{N}}$ est constante égale à $\frac{1}{e}$ et a donc pour limite $\frac{1}{e}$.

Pour $x \in]1, +\infty[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in [0, 1[, \ f(1) = \frac{1}{e}, \ f(x) = 0 \text{ si } x \in]1, +\infty[.$$

Définition 3

On appelle **norme de la convergence uniforme** sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'application :

$$\mathcal{B}(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| \text{ (2)}$$

(2) S'il est nécessaire de préciser I, on notera : $\|f\|_\infty^I = \sup_{x \in I} |f(x)|$

Définition 4

Convergence uniforme d'une suite de fonctions

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_\mathbb{N}$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge uniformément sur** I si et seulement si il existe une fonction f de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$. (3)

(3) On dira encore que la suite $(f_n)_\mathbb{N}$ converge uniformément sur I vers f.

Remarques

1) Ceci suppose qu'à partir d'un certain rang r, chaque fonction $f - f_n$ ($n \geqslant r$) est bornée et que la suite $(f - f_n)_{n \geqslant r}$ converge vers 0 dans $\mathcal{B}_\infty(I, \mathbb{K})$.

2) Dans ce cas, pour tout x de I, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty$: la suite de fonctions $(f_n)_\mathbb{N}$ converge simplement sur I vers f, (cf. propriété **1** suivante).

3) Il se peut qu'une suite de fonctions $(f_n)_\mathbb{N}$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et uniformément sur un sous-intervalle J de I c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_\infty^J = 0$.

La limite uniforme de $(f_n)_\mathbb{N}$ sur J est alors la restriction de f à J. (4)

(4) Noter que l'on utilise là un langage simplifié. En toute rigueur il faudrait dire que c'est la suite des restrictions $f_{n|J}$ qui converge vers $f_{|J}$.

Définition 5

Convergence uniforme locale d'une suite de fonctions

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_\mathbb{N}$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge uniformément sur tout segment de** I si et seulement si il existe une fonction f de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ telle que, quel que soit le segment S inclus dans I, la suite des restrictions $(f_{n|S})_\mathbb{N}$ converge uniformément sur S vers $f_{|S}$. (5)

(5) Là encore, il en résulte que la suite de fonctions $(f_n)_\mathbb{N}$ converge simplement sur I vers f.

Exemples

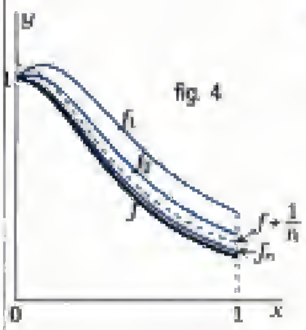


fig. 4

1) $I = [0, 1]$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x + n}{n + 4nx^2}$ (fig. 4).

La suite $(f_n)_\mathbb{N}$ converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + 4x^2}$.

Formons $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{n(1 + 4x^2)}$, il en résulte pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$

donc $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n}$ et la suite converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

2) $I = [0, 1]$, $f_n : x \mapsto x^n$.

On a vu précédemment que $(f_n)_\mathbb{N}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par : $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$.

De $f_n(x) - f(x) = x^n$ si $x \in [0, 1[$ et $f_n(1) - f(1) = 0$, on déduit $\|f_n - f\|_\infty^{[0,1]} = 1$ donc $(f_n)_\mathbb{N}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Fixons alors a quelconque dans $[0, 1[$, on obtient maintenant $\|f_n - f\|_\infty^{[0,a]} = a^n$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty^{[0,a]} = 0$: la convergence est uniforme sur $[0, a]$. On en déduit que $(f_n)_\mathbb{N}$ converge uniformément sur tout segment de $[0, 1[$. (6)

(6) Pour tout segment $S \subset [0,1[$, avec $a = \sup S$ on a $S \subset [0, a]$ donc $\|f_n - f\|_\infty^S \leqslant \|f_n - f\|_\infty^{[0,a]}$ et $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty^S = 0$

2. Séries de fonctions : modes de convergence

Définition 6

Série de fonctions

On appelle **série de fonctions** une série $\sum u_n$ de terme général $u_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

La suite de fonctions de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée **suite des sommes partielles** de la série de fonctions $\sum u_n$. [7]

[7] Une série de fonctions $\sum u_n$ est entièrement définie par la donnée de la suite de fonctions $(S_n)_{\mathbb{N}}$.

Définition 7

Convergence simple d'une série de fonctions

On dit que la série $\sum u_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge simplement sur** I :

lorsque, pour tout $x \in I$, la série de terme général $u_n(x)$ converge dans $\mathbb{K}$,

c'est-à-dire lorsque la suite $(S_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge simplement sur I. [8]

On appelle **somme de la série** $\sum u_n$, la fonction S de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ définie par :

$$S : I \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

[8] En effet, par définition de la convergence d'une série numérique, $\sum u_n(x)$ converge si et seulement si $(S_n(x))_{\mathbb{N}}$ est convergente.

Remarque

Dans ces conditions, on dispose de la suite de fonctions $(R_n)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$:

$$R_n : I \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

et cette suite converge simplement sur I vers la fonction nulle. [9]

Avec ces notations, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S = S_n + R_n$. [10]

[9] $(R_n)_{\mathbb{N}}$ est la suite des restes d'ordre n. $\forall x \in I, \lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

[10] Dans certains cas on pourra rencontrer des notations légèrement différentes : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

Exemple

$I = [0, 1]$, $u_n : x \mapsto x^n - x^{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = 1 - x^{n+1}$ donc $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$, sa fonction somme S étant définie par $S(x) = 1$ si $x \in [0, 1[$ et $S(1) = 0$.

De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = x^{n+1}$ si $x \in [0, 1[$ et $R_n(1) = 0$.

Définition 8

Convergence uniforme d'une série de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge uniformément sur** I si et seulement si la suite $(S_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge uniformément sur I.

Définition 9

Convergence uniforme locale d'une série de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge uniformément sur tout segment de** I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge uniformément sur tout segment de I.

Remarque

Dans ce cas, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I.

On dispose donc de la fonction somme $S : I \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et de la suite des fonctions restes d'ordre n : $(R_n)_{\mathbb{N}}$.

Théorème 1

Pour qu'une série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ soit uniformément convergente sur I (resp. sur tout segment de I), il faut et il suffit qu'elle soit simplement convergente sur I et que la suite $(R_n)_n$ des restes d'ordre n converge uniformément sur I (resp. sur tout segment de I) vers 0 (fonction nulle de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$). ✎(11)

✎(11) Ce résultat est fondamental : pour prouver que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I, on essaiera de majorer uniformément (c'est-à-dire indépendamment de x) la valeur absolue du reste $R_n(x)$ par une suite de limite nulle.

☞ Il suffit de remarquer que quel que soit n, $S - S_n = R_n$.

Exemple

$I = [0, 1]$, $u_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^n}{n+1}$.

Pour tout $x \in [0, 1]$, la série $\sum u_n(x)$ converge d'après le critère de Leibniz (ou critère spécial des séries alternées). Dans cette situation on dispose de la majoration :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+2} \leqslant \frac{1}{n+2}.$$

On a donc $\| R_n \|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$ et la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série en résulte.

Définition 10

Convergence normale d'une série de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge normalement sur** I si et seulement si la série réelle de terme général $\| u_n \|_\infty^I$ est convergente. ✎(12)

✎(12) La convergence normale est une notion qui ne s'applique qu'aux séries de fonctions.

Remarque

Ceci suppose qu'à partir d'un certain rang r, chaque fonction u_n $(n \geqslant r)$ est bornée.

Théorème 2

La série $\sum u_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est normalement convergente sur I si et seulement si il existe une série $\sum \alpha_n$ à termes réels positifs convergente et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |u_n(x)| \leqslant \alpha_n$.

☞ C'est un corollaire immédiat du critère de domination pour les séries à termes réels positifs.

Définition 11

Convergence normale locale d'une série de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge normalement sur tout segment de** I si et seulement si, quel que soit le segment $S \subset I$, la série réelle de terme général $\| u_n \|_\infty^S$ est convergente.

3. Comparaison des modes de convergence

Propriété 1

Convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple

Si une suite ou une série de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ converge uniformément sur I (resp. sur tout segment de I) alors elle converge simplement sur I. ✎(13)

✎(13) On a vu dans des exemples précédents que la réciproque de cette implication est fausse.

☞ C'est l'objet de la remarque 2) de la définition **4**.

Propriété 2

Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme

Si une série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I. [14]

[14] L'exemple de la série de terme général $u_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ montre que la réciproque de cette implication est fausse.

Pour tout $x \in I$, on a $|u_n(x)| \leqslant \| u_n \|_\infty^I$, et la série de terme général $\| u_n \|_\infty^I$, $(n \geqslant r)$, est convergente, donc, par critère de comparaison de séries à termes réels positifs, la série $\sum u_n(x)$ converge.

C'est la convergence simple sur I de la série de fonctions $\sum u_n$.

Introduisons le reste d'ordre n de la série réelle $\sum \| u_n \|_\infty^I$, $\rho_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \| u_k \|_\infty^I$

et celui de la série de fonctions $\sum u_n$, $R_n : A \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$.

Majorons : $\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \| u_k \|_\infty^I \leqslant \rho_n$,

d'où $|R_n(x)| \leqslant \rho_n$, $\| R_n \|_\infty^I \leqslant \rho_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \| R_n \|_\infty^I = 0$.

Comme la suite de fonctions $(R_n)_\mathbb{N}$ converge uniformément sur I vers 0, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I. [15]

[15] C'est le théorème 1.

Propriété 3

Condition nécessaire de convergence uniforme d'une série de fonctions

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ qui converge uniformément sur I ; alors la **suite** de fonctions $(u_n)_\mathbb{N}$ converge uniformément sur I vers 0. [16]

[16] Ceci signifie, qu'à partir d'un certain rang, chaque fonction u_n est bornée et que la suite réelle $n \mapsto \| u_n \|_\infty^I$ converge vers 0.

Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I, la suite (R_n) des restes converge uniformément sur I vers 0.

Or, en écrivant $u_n = R_n - R_{n+1}$ on obtient : $\| u_n \|_\infty^I \leqslant \| R_n \|_\infty^I + \| R_{n+1} \|_\infty^I$

d'où la conclusion.

Conséquence pratique

Pour prouver qu'une série ne converge pas uniformément sur I, il suffit de montrer que le terme général ne tend pas uniformément vers 0.

Exemple

La série de terme général $u_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto nx^n(1-x)$ converge simplement sur $[0, 1]$ car $u_n(1) = 0$ et pour $x \in [0, 1[$, $\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n(x) = 0$. [17]

[17] Pour $0 \leqslant x < 1$, on applique la règle de Riemann.

Formons alors $u_n\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, on obtient $\lim_{n \to +\infty} u_n\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{e}$ d'où :

$$\| u_n \|_\infty^{[0,1]} \geqslant \frac{1}{e}.$$

En conséquence $\| u_n \|_\infty^{[0,1]}$ ne tend pas uniformément vers 0 et la série ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

B. Continuité – Limite

1. Continuité et convergence uniforme

(18) I désigne toujours un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point.

(19) On peut remarquer que ce résultat reste valable en supposant seulement les fonctions f_n continues à partir d'un certain rang.

$\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. (18)

Théorème 3

Continuité d'une limite uniforme : cas d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ qui converge uniformément sur I vers $f : I \to \mathbb{K}$, alors f est continue sur I, donc $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. (19)

Soit x_0, x des points de I.

Par inégalité triangulaire, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

donc $\quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant 2\|f - f_n\|_\infty^I + |f_n(x) - f_n(x_0)|$.

La suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément, donc à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|f - f_{n_0}\|_\infty^I \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

et alors il vient : $\quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|$.

Avec la continuité de f_{n_0} en x_0, au même ε on peut associer $\eta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc tel que $\quad |x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

On a ainsi prouvé que f est continue en x_0 quel que soit le point x_0 de I.

Théorème 4

Continuité d'une limite uniforme : cas d'une série de fonctions

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ qui converge uniformément sur I, alors sa fonction somme $\quad S : I \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad$ est continue sur I, donc $S \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.

Appliquer le théorème précédent à la suite de fonctions $\quad n \mapsto S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$.

Conséquence pratique

La non continuité de la fonction limite (resp. de la somme) prouve la non convergence uniforme d'une suite (resp. d'une série) de fonctions continues.

Exemples

1) Nous avons étudié précédemment la suite de fonctions de terme général :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = x^n.$$

$(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers f :

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et f ne l'est pas.

Donc la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

2) Considérons la série de terme général $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n(1-x)$.

Nous avons vu précédemment que celle ci converge simplement sur $[0,1]$, la fonction somme S étant définie par : $S(x) = 1$ si $x \in [0,1[$ et $S(1) = 0$.

Comme il s'agit d'une série de fonctions continues sur $[0,1]$, la non continuité de S en 1 montre que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Ces théorèmes s'étendent facilement au cas d'une limite uniforme sur tout segment inclus dans I.

Théorème 5

Continuité d'une limite uniforme locale : cas d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C(I, \mathbb{K})$ qui converge simplement sur I vers f.

Si cette convergence est uniforme sur tout segment de I, alors f est continue sur I.

☞ D'après le théorème 3, la restriction de f à tout segment $[a, b]$ inclus dans I est continue, ce qui assure que f est continue sur I.

Théorème 6

Continuité d'une limite uniforme locale : cas d'une série de fonctions

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $C(I, \mathbb{K})$ qui converge simplement sur I.

Si cette convergence est uniforme sur tout segment de I, alors f est continue sur I.

☞ Appliquer le théorème précédent à la suite de fonctions $n \mapsto S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

2. Limite et convergence uniforme

Théorème 7

Théorème d'interversion des limites [20]

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément sur I vers f.

Si, a étant une borne de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$), chaque f_n admet une limite $b_n \in \mathbb{K}$ quand x tend vers a dans I, alors la suite $(b_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Dans ces conditions, en posant $b = \lim_{n \to +\infty} b_n$ on a aussi : $b = \lim_{x \to a} f(x)$,

c'est-à-dire $$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)$$ [21]

[20] aussi appelé théorème de la **double limite**.

[21] Ce résultat peut être admis. Nous en donnons une démonstration dans le cas où a est réel ; l'adaptation aux cas $a=+\infty$ et $a=-\infty$ est laissée à l'initiative du lecteur.

☞ L'espace $\mathbb{K}$ étant complet, montrons que $(b_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Pour tout $x \in I$ et tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a par inégalité triangulaire :
$$|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_p(x)|$$
donc $\quad |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \| f_n - f \|_\infty^I + \| f_p - f \|_\infty^I$.

À tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \| f_n - f \|_\infty^I \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

ainsi pour tout $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant n_0$ on a :
$$\forall x \in I, \ |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon$$
et en faisant tendre x vers a, il vient $|b_n - b_p| \leqslant \varepsilon$.

On a alors prouvé que $(b_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$ donc elle converge vers $b \in \mathbb{K}$.

Toujours par inégalité triangulaire, on a pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|f(x) - b| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b|$$
donc $\quad |f(x) - b| \leqslant \| f - f_n \|_\infty^I + |b_n - b| + |f_n(x) - b_n|$.

Sachant que $\lim_{n \to +\infty} \| f - f_n \|_\infty^I = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} |b - b_n| = 0$, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\quad \| f - f_{n_0} \|_\infty^I \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ et $|b_{n_0} - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$,

et on a pour tout $x \in I$, $\quad |f(x) - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |f_{n_0}(x) - b_{n_0}|$.

L'hypothèse $\lim_{x \to a} f_{n_0}(x) = b_{n_0}$ donne alors l'existence de $\eta > 0$ tel que :
$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - b_{n_0}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
donc tel que $\quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon$.

Il en résulte que $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Théorème 8

Théorème de la limite terme à terme

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément sur I, et S sa fonction somme.

Si, a étant une borne de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$), chaque u_n admet une limite $b_n \in \mathbb{K}$ quand x tend vers a dans I, alors la série $\sum b_n$ est convergente.

Dans ces conditions, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lim_{x\to a} S(x)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} u_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \text{ [22]}$$

[22] Il y a ici interversion des opérateurs $\displaystyle\lim_{x\to a}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$

On applique le théorème d'interversion des limites à la suite de fonctions de terme général :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i.$$

Exemple 1

a) Déterminer l'intervalle de définition de $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$.

b) Montrer que S est continue sur son intervalle de définition.

c) Quelle est la limite de S en $+\infty$?

a) Il s'agit ici d'étudier la série de terme général u_n : $\quad u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto n^x e^{-nx} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) > 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = e^{-x}$. Avec la règle de d'Alembert on en déduit que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente si et seulement si $x > 0$. [23]

En conséquence, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ ce qui donne l'intervalle de définition de sa fonction somme S.

[23] Le cas douteux correspond à $x = 0$, et on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n(0) = 1$.

b) Puisque $u_n(x) = e^{x(\ln n - n)}$ et $\ln n - n < 0$, la fonction u_n est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Il en résulte que pour tout $a > 0$, on a $\forall x \in [a, +\infty[,\ 0 < u_n(x) \leqslant u_n(a)$. La convergence de la série de terme général $u_n(a)$ donne alors la convergence normale donc uniforme sur $[a, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum u_n$. [24]

Ceci étant vrai quel que soit $a > 0$, il en résulte que $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$, et comme il s'agit d'une série de fonctions continues, la somme S est continue sur $]0, +\infty[$. [25]

[24] C'est une application du théorème 2.

[25] Application du théorème 6.

c) Avec $\ln n - n < 0$, on a clairement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ et, puisque la série converge uniformément sur $[1, +\infty[$ (par exemple), le théorème de la limite terme à terme donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

C. Intégration – Dérivation

1. Intégration et convergence uniforme

Dans le cadre des fonctions à valeurs réelles ou complexes, les notions nécessaires pour la compréhension de cette section ont été développées en première année.

$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ désigne toujours l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

Théorème 9

Intégrale d'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.

Alors f est continue sur $[a, b]$ et : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$.

☞ Cela découle de : $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)-f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\,\|f-f_n\|_\infty^{[a,b]}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-f_n\|_\infty^{[a,b]} = 0.$

Remarques

1) La continuité des fonctions f_n n'est utile qu'à partir d'un certain rang, avec la convergence uniforme elle procure la continuité de f.

2) Dans le cadre de ce théorème, il y a permutation des opérateurs $\lim\limits_{n\to+\infty}\cdot$ et $\int_a^b \cdot$

$$\int_a^b \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right]\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$

3) Ce théorème concerne exclusivement les intégrales sur un intervalle compact. ✎[26]

✎[26] Noter que la longueur du segment d'intégration intervient explicitement dans la démonstration.
On verra dans le chapitre 6 des résultats analogues relatifs aux intégrales sur un intervalle quelconque.

Théorème 10

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ convergeant uniformément sur tout segment de I vers f.

Alors a étant fixé dans I, on définit $\Phi\ : x \mapsto \int_a^x f$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Phi_n\ : x\mapsto \int_a^x f_n$.

La suite $(\Phi_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers Φ. ✎[27]

✎[27] D'après le théorème 5, f est continue sur I.
Alors Φ (resp. Φ_n) est l'unique primitive de f (resp. f_n) sur I s'annulant en a.

☞ Pour tout segment S inclus dans I, il existe un segment $J = [\alpha,\beta]$, $(\alpha<\beta)$ inclus dans I contenant a et S et on a alors $\forall x\in S$, $|\Phi_n(x)-\Phi(x)| \leqslant (\beta-\alpha)\|f_n - f\|_\infty^J$, donc $\|\Phi_n-\Phi\|_\infty^S \leqslant (\beta-\alpha)\|f_n-f\|_\infty^J$.

La conclusion en résulte.

Théorème 11

Intégration terme à terme d'une série de fonctions continues

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ qui converge uniformément sur $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

☞ Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite de fonctions $S_n : n\mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Remarques

1) Dans le cadre de ce théorème, il y a permutation des opérateurs $\int_a^b\cdot$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\cdot$

2) Ce théorème concerne exclusivement les intégrales sur un intervalle compact.

Exemple 2 Sachant que, pour tout x réel, $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, établir l'égalité : $\int_0^1 x^x\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

Pour tout $x\in\,]0,1]$, on a $x^x = e^{x\ln x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n \ln^n x}{n!}$.

Introduisons la série de fonctions de terme général u_n :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour } n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n(0)=0,\quad u_n(x) = \frac{x^n\ln^n x}{n!}\quad \text{si } x\in\,]0,1].$$

Établissons la convergence normale donc uniforme sur $[0,1]$:

$$\forall x\in[0,1],\ |u_n(x)| = \frac{|x\ln x|^n}{n!} \leqslant \frac{1}{e^n n!}.\ ✎^{(28)}$$

✎[28] Car l'étude des variations de $x\mapsto x\ln x$ montre que :
$\sup\limits_{]0,1]} |x\ln x| = \dfrac{1}{e}$.

$\| u_n \|_\infty^{[0,1]} = \left| u_n\left(\frac{1}{e}\right) \right| = \frac{1}{e^n n!}$ est le terme général d'une série convergente.

On peut alors appliquer le théorème **11** : [29]

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\Big)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_0^1 u_n(x)\mathrm{d}x\Big)$$

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x$$

Il reste à calculer $a_n = \displaystyle\int_0^1 (x\ln x)^n \mathrm{d}x$.

Une intégration par parties donne, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^p \mathrm{d}x = -\frac{p}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{p-1}\mathrm{d}x \quad \text{d'où} \quad a_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et en conclusion : $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ ou $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

[29] Intégration terme à terme d'une série de fonctions convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$.

2. Dérivation et convergence uniforme

I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ désigne l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 12

Dérivation d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_\mathbb{N}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ [30] telle que :

- la suite $(f_n)_\mathbb{N}$ converge simplement sur I, vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$,
- la suite $(f_n')_\mathbb{N}$ converge uniformément sur tout segment de I, vers $g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

Alors :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f' = g$,
- la suite $(f_n)_\mathbb{N}$ converge uniformément sur tout segment de I.

[30] La condition «à partir d'un certain rang, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I» suffit.

a étant un point fixé de I, et f_n étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a :

$$\forall x \in I,\ f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t.$$

D'après le théorème **10**, la suite $\big(f_n - f_n(a)\big)_\mathbb{N}$ converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g$.

Il en résulte $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x g$. Donc, puisque g est continue, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f' = g$.

Et d'autre part, pour tout segment S de I, on obtient :

$$\| f_n - f \|_\infty^S \leqslant \| f_n - f_n(a) - G \|_\infty^S + |f_n(a) - f(a)|$$

donc $(f_n)_\mathbb{N}$ converge uniformément sur tout compact de I vers $f = f(a) + G$.

Remarque

Dans le cadre de ce théorème, les opérateurs «dérivation» et «limite» commutent :

$$\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n\Big)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'.$$

Corollaire 1

Suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N}^*$ telle que :

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I,
- la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Alors la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec $f^{(k)} = g$ et chaque suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leqslant j \leqslant k$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$.

(31) On opère par récurrence sur k.

D'après le théorème 12, la propriété est vraie pour $k = 1$. (31)

Supposons la vraie pour $k-1$ avec $k \geqslant 2$. Posons alors pour tout n, $h_n = f_n^{(k-1)}$.

La suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur I et la suite des dérivées $(h_n')_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers g.

Donc, avec le théorème **12**, la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I et sa limite h est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $h' = g$. (32)

(32) Les conditions pour appliquer le théorème à l'ordre $k-1$ sont alors réunies.

Il en résulte d'après l'hypothèse de récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I avec $f^{(k-1)} = h$ et que chaque suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$.

Sachant que h est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $h' = g$, on en déduit enfin que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec $f^{(k)} = g$ et chaque suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leqslant j \leqslant k$, converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$.

On a ainsi prouvé que la propriété est récurrente, et puisqu'elle est vraie pour $k = 1$, elle l'est aussi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 2

Suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ telle que :

- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I,
- il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geqslant p$, la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et chaque suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$. (33)

(33) Le corollaire précédent s'applique à tout ordre $k \geqslant p$.

Théorème 13

Dérivation terme à terme

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ (34) telle que :

- la série $\sum u_n$ converge simplement sur I,
- la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur I sur tout segment $[a, b] \subset I$.

Alors la fonction somme $S : I \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec :

$$\forall x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

(34) Ici, il est utile que **toutes** les fonctions u_n soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Appliquer le théorème **12** à la suite de fonctions $S_n : n \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

Remarque

Dans le cadre de ce théorème, la dérivation et la sommation commutent :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

Corollaire 1

Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ telle que :

- chaque série $\sum u_n^{(j)}$, $0 \leq j \leq k-1$, converge simplement sur I,
- la série $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction somme $S : I \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et chaque série $\sum u_n^{(j)}$, $0 \leq j \leq k$, converge uniformément sur tout segment de I avec pour fonction somme $S^{(j)}$:

$$\forall j \in [\![0, k]\!],\ \forall x \in I, \quad S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x).$$ [35]

[35] Appliquer le corollaire 1 du théorème 12.

Corollaire 2

Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ telle que :

- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_n^{(j)}$ converge simplement sur I,
- il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq p$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction somme $S : I \to F$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et chaque série $\sum u_n^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur tout segment de I avec pour fonction somme $S^{(j)}$:

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \quad S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x).$$

D. Approximation des fonctions d'une variable réelle

1. Approximation par des fonctions en escalier

E désigne maintenant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, de manière analogue à ce qui a été fait dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, on définit dans $\mathcal{F}(I, E)$ les notions de convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions et de norme de la convergence uniforme. [36]

[36] Il s'agit ici d'un complément au programme, dont le but est de faciliter la présentation de l'intégrale dans le chapitre suivant.

- Une suite $(f_n)_\mathbb{N}$ de $\mathcal{F}(I, E)$ converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I, E)$ lorsque :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

c'est-à-dire : $$\forall x \in I,\ \lim_{n \to +\infty} \|f(x) - f_n(x)\| = 0.$$

- La norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(I, E)$ [37] est l'application :

$$\mathcal{B}(I, E) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \|f(x)\|.$$

[37] Espace des applications bornées de I dans E.

- Une suite $(f_n)_\mathbb{N}$ de $\mathcal{F}(I, E)$ converge uniformément sur I vers $f \in \mathcal{F}(I, E)$ lorsque :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

- La convergence uniforme implique la convergence simple.

Soit $[a, b]$, $a < b$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Définition 12

Une application $f : [a, b] \to E$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(c_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $]c_{j-1}, c_j[$ soit prolongeable par continuité sur $[c_{j-1}, c_j]$.

Une telle subdivision est dite **adaptée** à f. [38]

L'ensemble des applications continues par morceaux de $[a, b]$ dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], E)$; on le note $\mathcal{M}([a, b], E)$.

[38] La définition est identique à celle donnée en première année dans le cadre des fonctions réelles.
Comme dans ce cas, f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si elle est continue sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$ et admet, une limite à droite et une limite à gauche en chacun de ces points, une limite à droite en a, et une limite à gauche en b.

Définition 13

Une application $f : [a, b] \to E$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $(c_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $]c_{j-1}, c_j[$ soit constante. Une telle subdivision est dite **adaptée** à f. [39]

L'ensemble des applications en escalier de $[a, b]$ dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}([a, b], E)$; on le note $\mathscr{E}([a, b], E)$.

[39] Ici aussi, la définition est identique à celle donnée pour les fonctions réelles.

Théorème 14

Toute fonction $f : [a, b] \to E$ continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite $(\varphi_n)_{\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty^{[a,b]} = 0.$$

[40] f est uniformément continue sur $[a, b]$, donc, à tout $n \in \mathbb{N}$ on peut associer $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |x - y| \leqslant \alpha_n \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

À $\alpha_n > 0$, on associe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\quad \dfrac{b-a}{p} \leqslant \alpha_n \quad$ et $\quad \sigma_n = (c_j)_{j \in [\![0, p]\!]}$,

$c_j = a + j\dfrac{b-a}{p}$, subdivision régulière de $[a, b]$, puis on définit la fonction $\varphi \in \mathscr{E}([a, b], E)$ par :

$$\forall j \in [\![0, p-1]\!], \forall x \in [c_j, c_{j+1}[, \varphi_n(x) = f(c_j), \quad \varphi_n(b) = f(b).$$

Par construction, on a $\quad \forall x \in [a, b], \ \|f(x) - \varphi_n(x)\| \leqslant \dfrac{1}{n+1} \quad$ donc :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi $\quad f = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n \quad$ dans $\mathcal{B}_\infty([a, b], E)$.

[40] Pour cette démonstration, qui est non exigible, nous admettons la notion de fonction uniformément continue ainsi que le théorème de Heine qui dit qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue. Ces notions sont hors programme.

Théorème 15

Toute fonction $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite $(\varphi_n)_{\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

C'est-à-dire que $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0.$ [41]

[41] **Remarque**
Dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}_\infty([a,b],E)$ on peut interpréter les théorèmes **14** et **15** par :
$\mathcal{C}([a,b],E) \subset \overline{\mathscr{E}([a,b],E)}$
$\mathcal{M}([a,b],E) \subset \overline{\mathscr{E}([a,b],E)}$.

Soit $f \in \mathcal{M}([a, b], E)$ $\quad$ et $\quad (c_j)_{j \in [\![0, p]\!]}$ une subdivision adaptée :

pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, la restriction de f à $]c_j, c_{j+1}[$ est prolongeable en une application continue $\quad f_j : [c_j, c_{j+1}] \to E$.

D'après le théorème **14**, à tout $n \in \mathbb{N}$ on peut associer une application $\varphi_{j,n} : [c_j, c_{j+1}] \to E$ telle que :

$$\forall x \in [c_j, c_{j+1}], \quad \|f_j(x) - \varphi_{j,n}(x)\| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Alors, soit $\varphi_n : [a, b] \to E$ définie par :
$\forall j \in [\![0, p]\!], \quad \varphi_n(c_j) = f(c_j), \quad \forall j \in [\![0, p-1]\!], \forall t \in]c_j, c_{j+1}[, \quad \varphi_n(x) = \varphi_{j,n}(x).$

Cette fonction φ_n réalise $\varphi_n \in \mathscr{E}([a, b], E)$ et $\| f - \varphi_n \|_\infty^{[a,b]} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n = f$ dans $\mathscr{B}_\infty([a, b], E)$.

2. Approximation par des fonctions polynômes Les théorèmes de Weierstrass

Théorème 16

Les démonstrations de ces théorèmes sont hors programme.

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $a < b$.
Toute application $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exemple 3 Soit a, b réels tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Montrer que f est nulle.

Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a : $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$.

La fonction $\overline{f} : x \mapsto \overline{f(x)}$ est elle aussi continue sur $[a, b]$. Donc, d'après le premier théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_\mathbb{N}$ convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers $\overline{f}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, en écrivant :

$$\left| |f(x)|^2 - f(x)P_n(x) \right| = \left| f(x)\left(\overline{f(x)} - P_n(x)\right) \right|$$

on obtient :

$$\| |f|^2 - f P_n \|_\infty^{[a,b]} \leqslant \| f \|_\infty^{[a,b]} \| \overline{f} - P_n \|_\infty^{[a,b]} \text{ (42)}$$

(42) $|f|^2$ est la fonction définie sur $[a,b]$ par $x \mapsto |f(x)|^2$.

et il en résulte que la suite $(f P_n)_\mathbb{N}$ converge uniformément vers $|f|^2$ sur $[a, b]$.

D'après le théorème d'intégration des limites uniformes, il vient alors :

$$\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x)P_n(x)\mathrm{d}x$$

donc

$$\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[a, b]$, on sait que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0$ donne $\forall x \in [a, b], \quad f(x) = 0$.

Théorème 17

Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques T-périodiques. (43)

(43) Voir le chapitre 8 pour la définition des polynômes trigonométriques.

Tout polynôme trigonométrique, T-périodique, s'écrit :

$$P : x \mapsto \sum_{k=-p}^{k=p} a_k e^{ik\omega x} \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \ (a_k)_{-p \leqslant k \leqslant p} \in \mathbb{C}^{2p+1}, \text{ et } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Le théorème précédent nous donne l'existence d'une suite $(P_n)_\mathbb{N}$ de polynômes trigonométriques (44) telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \| f - P_n \|_\infty^\mathbb{R} = 0,$$

(44) Pour tout n, P_n s'écrit : $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-p_n}^{k=p_n} a_k(n) e^{ik\omega x}$

c'est-à-dire telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty^{[0,T]} = 0.$$

En effet, la fonction $f - P_n$ étant T-périodique, on a :

$$\|f - P_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \|f - P_n\|_\infty^{[0,T]}.$$

Exemple 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue, T-périodique et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \int_0^T f(x)e^{in\omega x}\mathrm{d}x = 0 \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Montrer que f est nulle.

Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme trigonométrique T-périodique P on a :

$$\int_0^T f(x)P(x)\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction $\overline{f}$ est, elle aussi, continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Donc, d'après le deuxième théorème de Weierstrass, il existe $(P_n)_{\mathbb{N}}$ suite de polynômes trigonométriques uniformément convergente vers $\overline{f}$ sur $\mathbb{R}$.

Comme dans l'exemple 3, on montre que la suite $(f\,P_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|f|^2$ sur $\mathbb{R}$, et le théorème d'intégration des limites uniformes donne :

$$\int_0^T |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^T f(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[0, T]$, on en déduit :

$$\forall x \in [0, T], \quad f(x) = 0.$$

Enfin la périodicité donne que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

L'essentiel

I. Suites de fonctions

✔ **Si l'on veut** étudier une suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$,

- **on peut** suivre le plan suivant :

1) Étude sommaire de chaque fonction f_n

- Préciser l'ensemble de définition A commun à tous les f_n.
- Remarquer les propriétés de parité, périodicité, et continuité de f_n.
- Éventuellement, donner l'allure du graphe de la fonction f_n.

2) Étude de la convergence simple de la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$

- Pour x fixé dans A, étudier la convergence de la suite $\left(f_n(x)\right)_{\mathbb{N}}$: on précisera la partie $B = \{x \in A / \left(f_n(x)\right)_{\mathbb{N}} \text{ converge}\}$ et la fonction $f : B \to F, \quad x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

On se limite au cas où A est un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints, et de même pour B.

3) Étude de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ sur I

I est l'un des intervalles dont la réunion est égale à B.

- Former la fonction différence $\delta_n : I \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto |f(x) - f_n(x)|$.
- Si l'étude des variations de δ_n est faisable puis, si δ_n est bornée, expliciter $\|f - f_n\|_\infty^I = \sup\limits_{x\in I} |f(x) - f_n(x)|$, et étudier la suite numérique de terme général $\|f - f_n\|_\infty^I$.
- Sinon, essayer de trouver une suite majorante $(\mu_n)_{\mathbb{N}}$:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, |f(x) - f_n(x)| \leqslant \mu_n.$$
- Montrer (éventuellement) que la convergence n'est pas uniforme sur I.

4) Si la convergence n'est pas uniforme sur I, essayer de trouver des sous-intervalles J de I sur lesquels elle l'est.

En particulier, on s'attachera à mettre en évidence, lorsque c'est le cas, une convergence uniforme sur tout intervalle compact inclus dans I.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2.

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur un intervalle I,

- **on peut** si on n'a pas pu calculer $\|f - f_n\|_\infty^I$, essayer de trouver une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ de points de I telle que $\delta_n(x_n)$ ne tende pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$,
- **on peut** s'il s'agit d'une suite de fonctions continues, penser à observer (éventuellement) que la limite n'est pas continue,
- **on peut** si I est un segment et si les fonctions f_n sont continues, penser à comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n$ et $\int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

Méthodes

II. Séries de fonctions

✔ Si l'on veut étudier une série de fonctions de terme général $u_n : A \to F$,

- **on peut** suivre le plan suivant.

1) Étude de la convergence simple

- Déterminer la partie $B = \{x \in A / \sum u_n(x) \text{ converge}\}$.
En pratique, A est un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints, et de même pour B.

2) Étude de la convergence normale sur I

I est l'un des intervalles non vide non réduit à un point dont la réunion est égale à B.

- Si c'est faisable, calculer $v_n = \| u_n \|_\infty^I$. Alors l'étude de la série réelle $\sum v_n$ permet de dire si la série $\sum u_n$ est, ou n'est pas, normalement convergente sur I.
- Sinon, essayer de trouver une série réelle $\sum w_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|u_n(x)| \leqslant w_n$. Alors la convergence de la série $\sum w_n$ est une condition suffisante pour que $\sum u_n$ soit normalement convergente sur I.
- Si la convergence n'est pas normale sur I, on examinera s'il existe des sous-intervalles de I sur lesquels elle l'est.
En particulier, on mettra en évidence les cas (éventuels) où la convergence est normale sur tout segment de I.

3) Étude de la convergence uniforme sur I

- La question ne se pose que lorsque la convergence n'est pas normale.
- On essaiera de majorer uniformément le reste R_n pour mettre en évidence une suite numérique $(\mu_n)_\mathbb{N}$ telle que $\| R_n \|_\infty^I \leqslant \mu_n$.
Alors $\lim_{n \to +\infty} \mu_n = 0$ est une condition suffisante pour que la convergence soit uniforme sur I.
→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 4, 5.

✔ Si l'on veut montrer que la convergence d'une série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas uniforme sur un intervalle I,

- **on peut** essayer de trouver une suite $(x_n)_\mathbb{N}$ de points de I telle que $R_n(x_n)$ ne tende pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$,
- **on peut** examiner si l'on est dans le cas particulier où u_n ne tend pas uniformément vers 0 sur I,
- **on peut** s'il s'agit d'une série de fonctions continues sur I, observer (éventuellement) que la fonction somme n'est pas continue.
→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 6

✔ Si l'on veut déterminer un équivalent de la somme d'une série de fonctions en une borne de l'ensemble de définition

- **on peut** essayer d'encadrer cette somme au moyen d'intégrales. *On sera alors amené à utiliser les notions présentées au chapitre* 6.
→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7.

Mise en œuvre

I. Suites de fonctions

Ex. 1

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf\left(n, \dfrac{x^2}{n}\right), \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

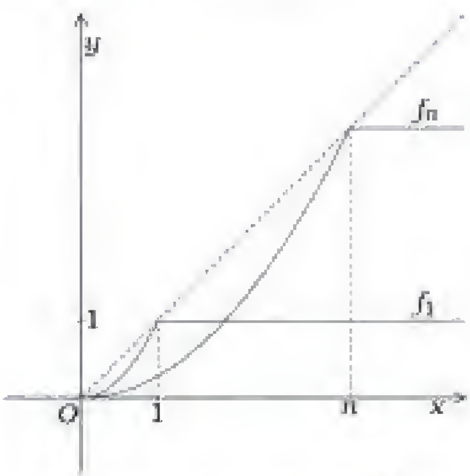
Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$.

Indications

La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ mais elle l'est sur tout intervalle compact $[-a, a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution

Chaque fonction f_n est paire et bornée.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$, dès que $n \geqslant |x|$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers 0 (fonction nulle).

Par ailleurs, $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = n$.

La suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, mais pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-a, a]$ car :

$$\|f_n\|_\infty^{[-a,a]} = \sup_{x \in [-a,a]} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{a^2}{n} \quad \text{dès que } n \geqslant a.$$

Commentaires

Du fait de la parité, on se contente de représenter le graphe de f_n sur $\mathbb{R}_+$.

À défaut de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, on met en évidence la convergence uniforme sur tout intervalle compact $[a, -a]$ donc aussi sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ex. 2

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} \quad n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (vers f).

Donner l'allure des courbes représentatives $(\mathscr{C}_n)$ et $(\mathscr{C})$ de f_n et f.

2) Établir sa convergence uniforme sur $\mathbb{R} \setminus]-1-a, -1+a[$ pour tout $a > 0$.

Indications

Convergence simple : distinguer les cas $|x| > 1$ et $|x| < 1$.

Convergence uniforme : soit f la limite simple de $(f_n)_{\mathbb{N}}$, majorer $|f(x) - f_n(x)|$ pour x décrivant $]1, +\infty[$, puis $[0, 1]$, et enfin $[-1 + a, 0]$ et $]-\infty, -1 - a]$ $(0 < a < 1)$.

Solution

Observons que $f_n(-1) = 0$, $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 1$.
Les courbes $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ont donc trois points communs :

$$A = (-1, 0) \quad , \quad B = (0, 1) \quad , \quad C = (1, 1).$$

1) Convergence simple

Si $|x| > 1$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$ et $x - f_n(x) = \dfrac{x-1}{x^{2n}+1}$.

Si $|x| < 1$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $1 - f_n(x) = \dfrac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}}$.

La suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers f définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

2) Convergence uniforme

- Sur $]1, +\infty[$:

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) = \frac{x-1}{x^{2n}+1} \leqslant \frac{x-1}{x^{2n}-1}$$

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{x^{2n-1} + \dots + x + 1} \leqslant \frac{1}{2n}$$

$f - f_n$ est bornée sur $]1, +\infty[$ et $\sup\limits_{x\in]1,+\infty[} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n}$.

- Sur $[0, 1]$:

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) = \frac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}} \leqslant \frac{x^{2n}(1-x)}{1-x^{2n}}$$

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{1 + x + \dots + x^{2n-1}} \leqslant \frac{x^{2n}}{2nx^{2n-1}} \leqslant \frac{1}{2n}$$

$f - f_n$ est bornée sur $[0, 1]$ et $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n}$.

Ainsi $\|f(x) - f_n(x)\|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{2n}$: la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Prenons maintenant un réel $a \in]0, 1[$.

- Sur $[-1 + a, 0]$

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) = \frac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}} \leqslant 2(1-a)^{2n} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 2(1-a)^{2n} = 0.$$

Commentaires

Puisque l'on a affaire à une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont la limite simple f n'est pas continue, il est acquis que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Ne tentons pas l'étude des variations de $f - f_n$ qui est compliquée alors qu'une simple majoration fournit le résultat.

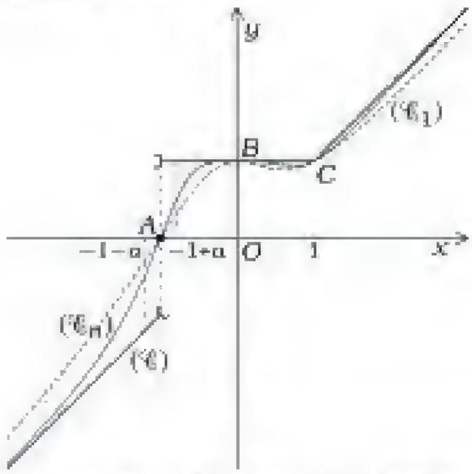
Utiliser $1 \leqslant 1 - x \leqslant 2 - a < 2$, $0 \leqslant x^{2n} \leqslant (1-a)^{2n}$, et $0 < \frac{1}{1+x^{2n}} \leqslant 1$.

- Sur $]-\infty, -1-\alpha]$

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) = \frac{|x|+1}{x^{2n}+1} \leqslant \frac{2\,|x|}{x^{2n}} \leqslant \frac{2}{(1+\alpha)^{2n-1}}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{(1+\alpha)^{2n-1}} = 0.$

Utiliser $-x = |x| \geqslant 1+\alpha > 1.$



Conclusion : pour tout α fixé dans $]0,1[$, la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur :

$$]-\infty, -1-\alpha] \cup [-1+\alpha, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-1-\alpha, -1+\alpha[.$$

Remarque :

$\lim\limits_{x\to -1} |f(x) - f_n(x)| = 1$ donne :

$$\|f-f_n\|_\infty^{]-1,+\infty[} \geqslant 1$$

et $\|f-f_n\|_\infty^{]-\infty,-1]} \geqslant 1$

Il n'y a donc pas convergence uniforme ni sur $]-1,+\infty[$, ni sur $]-\infty,-1]$.

On peut aussi, pour arriver à ce résultat, observer qu'il n'y a pas interversion des limites au point -1.

Ex. 3

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

1) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$. La convergence est-elle uniforme ?

3) Montrer que pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur la demi-droite $[a, +\infty[$.

Indications

Pour l'étude de la convergence uniforme, on peut se limiter à $x \in [0, +\infty[$. Remarquer que f_n atteint son maximum en un point x_n tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Solution

1) Pour $x = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

En conclusion, la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

2) Posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n$.

On trouve $I_n = \dfrac{1}{2n} \ln\left(1+n2^n\right)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Si la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur $[0,1]$, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n = 0.$$

Ceci n'étant pas réalisé, la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$ et a fortiori sur $\mathbb{R}$.

Commentaires

$\ln(1+n2^n) = n \ln 2 + \ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n2^n}\right)$

3) Les variations de f_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont résumées dans le tableau :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}2^{-\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
$f_n(x)$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{n}}2^{\frac{n}{2}-1}$	$\searrow$ 0

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f_n'(x) = \dfrac{2^n\left(1-n2^n x^2\right)}{\left(1+n2^n x^2\right)^2}$.

De plus f étant impaire, on limite l'étude à $[0, +\infty[$.

Soit maintenant $a > 0$ fixé. Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}2^{-\frac{n}{2}} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $\dfrac{1}{\sqrt{n}}2^{-\frac{n}{2}} \leqslant a$.

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$ et on a :

$$\| f_n \|_\infty^{[a,+\infty[} = f_n(a).$$

Donc, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = 0$, la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.

L'imparité des f_n permet de dire qu'il en est de même sur $]-\infty, -a]$.

L'étude des variations donne :

$$\| f_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{\sqrt{n}}2^{\frac{n}{2}-1},$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \| f_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = +\infty$, et on retrouve ainsi que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

II. Série de fonctions

Ex. 4

Étudier les convergences normale, simple et uniforme sur $]0, 1]$ des deux séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum v_n$ définies par : $u_n(x) = x^n \ln^2 x$ et $v_n(x) = x^n \ln x$.

Indications

Pour étudier la convergence uniforme de la série $\sum v_n$, expliciter le reste d'ordre n.

Solution

1) Cas de la série $\sum u_n$

$u_0(x) = \ln^2 x$, u_0 est non bornée sur $]0, 1]$.

Sinon, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\left(x^n \ln^2 x^n\right) = \dfrac{\varphi(x^n)}{n^2}$ où $\varphi(t) = t\ln^2 t$, φ est bornée sur $]0, 1]$: $\| \varphi \|_\infty^{]0,1]} = \dfrac{4}{e^2}$.

D'où $0 \leqslant u_n(x) \leqslant \dfrac{4}{n^2e^2}$ et $\| u_n \|_\infty^{]0,1]} \leqslant \dfrac{4}{n^2e^2}$.

Conclusion : la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $]0, 1]$.

2) Cas de la série $\sum v_n$

- Étude de la convergence normale

$v_0(x) = \ln x$, v_0 est non bornée sur $]0, 1]$.

Sinon, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n(x) = \dfrac{x^n \ln x^n}{n} = \dfrac{\theta(x^n)}{n}$ où $\theta(t) = t\ln t$;

θ est bornée sur $]0, 1]$: $\| \theta \|_\infty^{]0,1]} = \dfrac{1}{e} = \left|\theta\left(\dfrac{1}{e}\right)\right|$ d'où :

$$\| v_n \|_\infty^{]0,1]} = \frac{1}{ne}.$$

Conclusion : la série de fonctions $\sum v_n$ ne converge pas normalement sur $]0, 1]$.

Commentaires

Comme il s'agit d'une série géométrique, on peut expliciter la somme S :

$\forall x \in]0, 1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln^2 x = \frac{\ln^2 x}{1-x}, \quad S(1) = 0.$$

En fait, avec $u_n\left(e^{-\frac{2}{n}}\right) = \dfrac{4}{n^2e^2}$, il vient $\| u_n \|_\infty^{]0,1]} = \dfrac{4}{n^2e^2}$.

- Étude de la convergence simple

$v_n(1) = 0$ et pour $x \in]0,1[$: $v_n(x) = x^n \ln x$ est une série géométrique de raison x.

Conclusion : la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $]0,1]$.

- Étude de la convergence uniforme

Examinons la suite des restes : $(R_n)_{\mathbb{N}}$

$$\forall x \in]0,1[, R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} x^k \ln x = \frac{x^n \ln x}{1-x} \quad , \quad R_n(1) = 0.$$

Comme la fonction R_n admet des limites aux bornes de $]0,1[$:

$$\lim_{x \to 0} R_n(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1} R_n(x) = -1,$$

R_n est bornée sur $]0,1]$ mais $\| R_n \|_\infty^{]0,1]} \geqslant 1$; la suite $\left(\| R_n \|_\infty^{]0,1]}\right)$ ne converge pas vers 0.

Conclusion : la série de fonctions $\sum v_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,1]$.

Sa somme T est connue :

$\forall x \in]0,1[$,

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln x = \frac{\ln x}{1-x}, \quad T(1) = 0.$$

Ex. 5

Soit $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n^\alpha x^n (1-x)$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Trouver les valeurs du réel α pour lesquelles la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente, simplement convergente, uniformément convergente sur $[0,1]$.

Indications

Pour l'étude de la convergence uniforme dans le cas $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, minorer le reste d'ordre n en faisant apparaître une série télescopique.

Solution

1) Convergence normale

$$\sup_{[0,1]} |u_n(x)| = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

La série de terme général $\| u_n \|_\infty$ converge si et seulement si $\alpha < 0$.

Conclusion : la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha < 0$.

2) Convergence simple

$u_n(0) = 0$ et $u_n(1) = 0$. Si $x \in]0,1[$, $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$

et, d'après le critère de Riemann, la série $\sum u_n(x)$ converge.

Conclusion : la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

3) Convergence uniforme

Rappelons que $\| u_n \|_\infty^{[0,1]} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{e}$ et qu'une condition nécessaire pour la convergence uniforme est $\lim_{n \to +\infty} \| u_n \|_\infty^{[0,1]} = 0$ donc nécessairement $\alpha < 1$.

Pour $\alpha < 0$, la convergence est normale donc uniforme.

Plaçons-nous désormais dans le cas $0 \leqslant \alpha < 1$.

Commentaires

L'étude de la fonction u_n est directe avec : $u_n'(x) = n^\alpha x^{n-1}[n-(n+1)x]$

Série de Riemann et critère des équivalents de séries positives.

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Examinons la suite des restes d'ordre n :

$$R_n \ : \ [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=n}^{+\infty} k^{\alpha} x^k (1-x).$$

Pour $0 < x < 1$, on a : $R_n(x) \geqslant n^{\alpha} \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \left(x^k - x^{k+1}\right) = n^{\alpha} x^n$.

Pour mettre en défaut la convergence uniforme, on tente de minorer $R_n(x)$ sur $[0,1[$.

Si la fonction R_n soit bornée sur $[0,1]$, cette minoration donne :

$$\| R_n \|_{\infty}^{[0,1]} \geqslant n^{\alpha} \geqslant 1.$$

Donc la suite $\left(R_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers 0.

Il est clair que si R_n n'est pas bornée, la convergence n'est pas uniforme.

Conclusion : la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha < 0$ (cas de la convergence normale).

Ex. 6

1) Établir la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-nx} - (1-x)^n$.

2) Que dire de la série de fonctions $\sum f_n$?

Indications

La présence de séries géométriques permet d'expliciter la fonction somme S et on peut alors étudier sa continuité.

Solution

1) Résumons les variations de f_n :

x	0	$\frac{1}{n}$	a_n	1
$g_n(x)$	$0 \ \nearrow$	$\searrow$	$0 \ \searrow$	-1
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$b_n \ \searrow$	e^{-n}

Commentaires

$f_n'(x) = ne^{-nx}\left[(1-x)^{n-1}e^{nx} - 1\right]$

$f_n'(x)$ est du signe de $g_n(x)$ avec $g_n(x) = (1-x)^{n-1}e^{nx} - 1$.

$g_n'(x) = (1-x)^{n-2}e^{nx}(1-nx)$.

De cette étude il résulte : $\| f_n \|_{\infty}^{[0,1]} = b_n = f_n(a_n)$, où a_n est caractérisé par $g_n(a_n) = (1-a_n)^{n-1}e^{na_n} - 1 = 0$.

Donc $\left(1-a_n\right)^n = \left(1-a_n\right)e^{-na_n}$.

En remplaçant $(1-a_n)^n$ par $(1-a_n)e^{-na_n}$ dans b_n, il vient :

$$b_n = a_n e^{-na_n} = \frac{(na_n e^{-na_n})}{n} \leqslant \frac{1}{ne}.$$

Car $\displaystyle\sup_{t \in [0,1]} te^{-t} = \frac{1}{e}$.

Ainsi $\| f_n \|_{\infty} \leqslant \dfrac{1}{ne}$ et la suite de fonction $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

2) La convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ est claire.

$f_n(0) = 0$ et pour $x \in\ ]0,1]$, on a la somme de deux séries géométriques de raisons e^{-x} et $(1-x)$.

La somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie par $S(0) = 0$ et pour $x \in\ ]0,1]$:

$$S(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}.$$

Donnons un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0 :

$$S(x) = \frac{e^{-x} - 1 + x}{\left(1-e^{-x}\right)x} \sim \frac{1}{2}.$$

Ainsi S n'est pas continue en 0. Le théorème «continuité et limite uniforme» étant mis en défaut, la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Ex. 7

Trouver un équivalent de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} nx}$ quand x tend vers 0, $x > 0$.

Indications

La méthode consiste à comparer la somme de la série $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} nx}$ à la valeur de l'intégrale :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} tx}.$$

L'exercice ne sera donc utilement abordé qu'après avoir étudié la notion de fonction intégrable sur un intervalle quelconque (chapitre 6).

Solution

On commence par vérifier que la série de terme général :

$$u_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} nx}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction somme f est donc, en particulier, définie sur $]0, +\infty[$.

Pour $x > 0$ fixé, notons g_x la fonction $[0, +\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} tx}$.

On a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = g_x(n)$.

La décroissance de g_x sur $[0, +\infty[$ donne alors :

$$\forall n \geq 0, \int_n^{n+1} g_x(t)\mathrm{d}t \leq g_x(n) \text{ et } \forall n \geq 1, g_x(n) \leq \int_{n-1}^{n} g_x(t)\mathrm{d}t.$$

La série converge et la fonction g_x est intégrable sur $[0, +\infty[$, on peut donc sommer ces inégalités et il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} g_x(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \leq u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} g_x(t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$h(x) \leq f(x) \leq u_0(x) + h(x).$$

Calculons alors $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} tx} = \left[\frac{2}{x} \operatorname{Arctan} e^{tx}\right]_0^{+\infty}$

$$h(x) = \frac{\pi}{2x}.$$

La condition $u_0(x) = o\big(h(x)\big)$ est essentielle pour conclure :

$$f(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\sim} h(x) \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} nx} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

Commentaires

Pour $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{\operatorname{ch} nx} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2e^{-nx}$$

ce qui assure la convergence simple sur $]0, +\infty[$. Comme de plus les fonctions u_n sont paires, la somme f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire également.

Notons les conditions à réunir :

- pour $x > 0$ fixé, la fonction g_x est continue, décroissante sur $[0, +\infty[$,
- la fonction g_x est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} tx}$ et possède une limite ou un équivalent simple quand x tend vers 0,
- la fonction $x \mapsto u_0(x)$ est négligeable devant $h(x)$ quand x tend vers 0.

Pour $x < 0$ on obtiendrait :

$$h(x) = -\frac{\pi}{2x}.$$

Exercices

Niveau 1

Suites de fonctions

Ex. 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^I$ convergeant uniformément sur I.

Que peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{\mathbb{N}}$?

Ex. 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{nx} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = 0.$$

1) Montrer que chaque fonction f_n est bornée.

2) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

La convergence est-elle uniforme ?

Ex. 3

On considère la suite de fonctions $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_1(x) = \sin x, \quad \forall n \geqslant 2 \quad u_n(x) = \sin u_{n-1}(x).$

Montrer que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Ex. 4

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Arctan} \dfrac{x+n}{1+nx}$.

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Ex. 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{\left(1-e^{-x}\right)^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = n.$$

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$.

Ex. 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right).$$

1) Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$.

2) Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n$.

Séries de fonctions

Ex. 7

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$:

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \sin x (\cos x)^n.$$

1) Étudier la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$.

2) Étudier la série $\sum f_n$.

Ex. 8

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{1+a^{2n}x^2}$.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la convergence de la série de terme général f_n.

Ex. 9

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n} \quad (n \geqslant 2).$$

Ex. 10

Pour x réel, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Trouver un équivalent simple de f au voisinage de 0.

✎ *Dans cette question, il est efficace d'utiliser la notion de fonction intégrable sur* $[0,+\infty[$ *(cf. chapitre* **6***).*

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 11

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$, avec :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}}.$$

On distinguera les cas $x = 2$, $x > 2$, et $x < 2$.

Ex. 12

Étant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, on définit une suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ par la donnée de f_0 dans $\mathcal{C}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [a, b], \quad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

1) Étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

2) Calculer la fonction somme : $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Ex. 13

Soit $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$ et :

$$S : [0, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1 - x^n}.$$

1) Montrer que S est continue sur $[0, 1[$.

2) Montrer que pour tout $a \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1 - a).$$

3) Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend 1.

Ex. 14

1) Justifier la définition de la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n x \sin nx.$$

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$; calculer f'.

3) En déduire f.

Ex. 15

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite complexe qui converge vers 0.

1) Justifier la définition de :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

2) Montrer que $f(x) = o(e^x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Ex. 16

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Ex. 17

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Ex. 18

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x (1 - t^2)^n \mathrm{d}t,$$

et $$Q_n(x) = \frac{1}{P_n(1)} \int_0^x P_n(u)\mathrm{d}u.$$

Montrer que la suite de polynômes $(Q_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue $A : x \mapsto |x|$.

Ex. 19

On considère $(P_n)_{\mathbb{N}}$ suite de fonctions polynômes de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ définie par récurrence :

$$P_0 = 0, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right).$$

1) Étudier la convergence simple sur $[0, 1]$ de la suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$.

2) Pour tout $x \in [0, 1]$, établir les inégalités :

$$\sqrt{x} - P_n(x) \geqslant 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\sqrt{x} - P_n(x) \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \quad \textbf{(2)}$$

Montrer que la suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

3) En déduire (sans utiliser un théorème de Weierstrass) qu'il existe une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue $A : x \mapsto |x|$.

Ex. 20

Montrer que la série de fonctions de terme général :

$$u_n \;:\; x \mapsto (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+x^2}, \quad (n \geqslant 1)$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Ex. 21

Étudier la suite de fonctions $(u_n)_{\mathbb{N}}$ avec :

$$u_n \;:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}.$$

Ex. 22

Soit $f \;:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^{-x}}{\ell n\, n}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Montrer que f est de classe C^∞ sur D_f.

3) Trouver en chaque borne de D_f la limite et un équivalent simple de f. *L'étude en la borne inférieure sera traitée efficacement avec la notion de fonction intégrable sur $[2,+\infty[$ (cf. chapitre* **6***).*

Ex. 23

Soit $f \;:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,\ell n\left(1+\frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

1) Trouver l'ensemble de définition de f.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Ex. 24

Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\int_0^1 e^{nx(1-t)}f(t)\mathrm{d}t.$$

Niveau 3

Avec solution détaillée

Ex. 25

Soit $\quad f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\frac{x}{n^2+x^2}.$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) On pose $\quad R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\frac{x}{k^2+x^2}.$

Montrer que $\quad R_n(2n) \geqslant n\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{4n}\right).$

Qu'en déduit-on pour la convergence uniforme éventuelle sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général :

$$u_n \;:\; x \mapsto \operatorname{Arctan}\frac{x}{n^2+x^2}\;?$$

4) ✎ *Cette question ne sera utilement abordée qu'après l'étude de l'intégrabilité sur un intervalle quelconque (cf. chapitre* **6***).*

Établir pour tout $x > 0$:

$$\int_1^{+\infty}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

En déduire $\quad x\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} - \operatorname{Arctan} x \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}.$

Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Retrouver le résultat du 3).

Ex. 26

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\operatorname{ch}(nx)}.$

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2) Montrer que f est continue sur D.

3) Montrer que $\forall x \in D$:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(nx)} - \frac{1}{\operatorname{ch}((n+1)x)}\right).$$

4) En étudiant la convexité de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$, en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}.$

Ex. 27

Polynômes de Bernstein

Théorème de Stone Weierstrass

À toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, on associe la suite de polynômes :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}.$$

1) Déterminer $B_n(f)$ pour :

- $f : x \mapsto 1$,
- $f : x \mapsto x$,
- $f : x \mapsto x^2$.

2) Calculer :

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k}.$$

3) La continuité uniforme de f sur $[0,1]$ donne :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (u,v) \in [0,1]^2,$

$$|u - v| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon.$$

En observant que :

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^k(1-x)^{n-k},$$

et en décomposant la somme suivant la partition de $[\![0, n]\!]$ formée de :

$$I_n = \left\{ k / \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha \right\}$$

et $$J_n = [\![0, n]\!] \setminus I_n,$$

montrer que la suite $\left(B_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Ex. 28

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n!x)}{n!}.$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Dans la suite, x est un réel fixé quelconque.

On pose $h = \dfrac{2\pi}{p!}$. Montrer que :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{p!}{\pi\, n!} \sin\frac{\pi\, n!}{p!} \cos\left(n!\left(x + \frac{\pi}{p!}\right)\right).$$

3) Montrer que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a une limite réelle quand $p \to +\infty$ si et seulement si

$$A_p = \sum_{n=0}^{p-1} \cos\left(n!\left(x + \frac{\pi}{p!}\right)\right) \text{ en a une.}$$

4) On pose :

$$A'_p = \sum_{n=0}^{p-1} \cos\left(n!x\right) \cos\left(n!\frac{\pi}{p!}\right)$$

$$\text{et } A''_p = \sum_{n=0}^{p-1} \sin\left(n!x\right) \sin\left(n!\frac{\pi}{p!}\right).$$

Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} A''_p = 0$.

Montrer que A'_p a une limite quand $p \to +\infty$ si et seulement si $B_p = \sum\limits_{n=0}^{p-1} \cos\left(n!x\right)$ en a une.

5) Montrer que f n'est dérivable en aucun point x de $\mathbb{R}$.

Avec éléments de solution

Ex. 29

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$.

Montrer que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Ex. 30

Cet exercice ne sera utilement abordé qu'après l'étude de la fonction exponentielle complexe (cf. chapitre 5).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \inf\left\{ |z| \;/\; z \in \mathbb{C} \;/\; 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} = 0 \right\}.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Ex. 31

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k\lambda) = \int_0^1 f$.

Indications

Ex. 11

Pour $x > 2$, couper la somme en deux en considérant l'entier $E(\sqrt{n})$, puis majorer séparément les deux sommes.

Pour $x < 2$, encadrer $f_n(x)$.

Ex. 12

1) Établir $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], |f_n(x)| \leqslant M \dfrac{(x-a)^n}{n!}$.

2) Trouver une équation différentielle ayant pour solution :

$$G : x \mapsto \int_a^x F.$$

Ex. 13

2) $-\ell n(1-a) = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathrm{d}x.$

Montrer que l'on peut intégrer terme à terme sur $[0, a]$.

3) Montrer que $x \mapsto (1-x)S(x)$ est la somme d'une série normalement convergente sur $[0, 1]$.

Ex. 14

Appliquer soigneusement le théorème de dérivation terme à terme.

Ex. 15

Établir la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n e^{-x}$.

Ex. 16

Écrire :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j(n)$$

et appliquer le théorème de la limite terme à terme.

Ex. 17

Écrire $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n)$

et appliquer le théorème de la limite terme à terme.

Ex. 18

Majorer $\| Q_n - A \|_\infty^{[0,1]}$ en fonction de $P_n(1)$, puis montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} nP_n(1) = +\infty$.

Ex. 19

1) $\left(P_n(x)\right)_{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente.

2) Établir **(2)** par récurrence.

Ex. 20

Le théorème des séries alternées ne permet pas d'effectuer une majoration uniforme du reste R_n.

Majorer $R_{2n}(x)$ en groupant les termes deux par deux.

Ex. 21

- Convergence uniforme sur $[0, +\infty[$:

majorer $\left|e^{-2x} - u_n(x)\right|$ en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

- Convergence non uniforme sur $]-\infty, 0]$:

montrer $\sup\limits_{]-\infty,0]} \left(e^{-2x} - u_{n-1}(x)\right) \geqslant \dfrac{e^n n^n}{n!}$.

Ex. 22

2) Observer que lorsque $x \to +\infty$, le premier terme de la série est dominant. Lorsque $x \to 0$, encadrer $f(x)$ au moyen de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x \, \ell n \, t}$ et effectuer deux intégrations par parties pour trouver un équivalent simple de cette intégrale.

Ex. 23

2) Montrer que le théorème de la limite terme à terme s'applique.

Ex. 24

Justifier la permutation de la somme et de l'intégrale puis montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 f(t) e^{-e^{x(1-t)}} \mathrm{d}t = 0$.

Ex. 25

Majorer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt$

et minorer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt$

en utilisant que sur $[0,+\infty[$, Arctan est concave.

Ex. 26

4) La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ change de concavité en un point $\alpha > 0$.

En fonction de ce changement de concavité, couper en deux la somme égale à $f(x) - \dfrac{1}{2}$ puis majorer chacune des deux sommes en groupant ses termes deux par deux et en exploitant la concavité ou convexité de f.

Ex. 27

1) Introduire la fonction :

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{kt} x^k (1-x)^{n-k}$$

et ses dérivées.

3) Observer que, pour $k \in J_n$:

$$1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2.$$

Ex. 28

3) Montrer que $\left|\dfrac{\sin x}{x} - 1\right| \leqslant \dfrac{x^2}{6}$.

4) Majorer $\left|A_p' - B_p\right|$ en utilisant $|\cos x - 1| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

5) Pour que f soit dérivable en x il faudrait que la série $\sum \cos(n!x)$ soit convergente.

Avec éléments de solution

Ex. 29

Soit $g_n : t \mapsto \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{-n} - e^{-t}$. Montrer qu'il existe t_n tel que $\|f - f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = g_n(t_n) \leqslant e^{\frac{t_n}{n+1}} - 1$, puis étudier la suite de terme général $\dfrac{t_n}{n}$.

Ex. 30

$a_n = |z_n|$ où z_n est une racine du polynôme :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

On montre par l'absurde que a_n tend vers $+\infty$: dans le cas contraire, il existerait une suite extraite de $(z_n)_{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$ et on aurait $e^\ell = 0$!

Ex. 31

Vérifier que la propiété est vraie lorsque f est un polynôme trigonométrique 1-périodique puis appliquer le deuxième théorème de Weierstrass.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

Posons $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \dfrac{f_n}{1+f_n^2}$.

Il est clair que la suite $(g_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement vers $g = \dfrac{f}{1+f^2}$ sur I.

D'autre part, on a : $g_n - g = (f_n - f)\dfrac{1 - ff_n}{(1+f^2)(1+f_n^2)}$, donc :

$$\forall x \in I,\quad |g_n(x) - g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)|\,\frac{1 + |f(x)|\,|f_n(x)|}{(1+f^2(x))(1+f_n^2(x))}.$$

En remarquant que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|ab| \leqslant a^2 + b^2$, il vient :

$$1 + |f(x)f_n(x)| \leqslant 1 + f^2(x) + f_n^2(x) \leqslant (1+f^2(x))(1+f_n^2(x)),$$

et donc, $\forall x \in I,\ |g_n(x) - g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)|$, d'où encore $\| g_n - g \|_\infty^I \leqslant \| f_n - f \|_\infty^I$.

En conséquence, la convergence uniforme sur I de $(f_n)_{\mathbb{N}}$ vers f implique celle de $(g_n)_{\mathbb{N}}$ vers g.

Ex. 2

1) La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, ($\varphi(0) = 1$) est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, $\| \varphi \|_\infty^{\mathbb{R}} = 1$.

De plus $|f_n(x)| \leqslant \left|\dfrac{\sin nx}{nx}\right| = |\varphi(nx)| \leqslant 1$, donc chaque fonction f_n est bornée et continue.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n\,|x|}$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, et comme $f(0) = 0$, la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers 0 (fonction nulle).

En remarquant que $f_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) = \dfrac{2}{\pi}$, il vient $\| f_n \|_\infty^{\mathbb{R}} \geqslant \dfrac{2}{\pi}$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Ex. 3

<u>Convergence simple</u>

Il s'agit ici d'étudier une suite récurrente très classique.

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(x) \in [-1, 1]$. D'autre part, la fonction $\sin$ étant impaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ les suites $(u_n(x))_{\mathbb{N}^*}$ et $(u_n(-x))_{\mathbb{N}^*}$ sont opposées ; on peut donc, pour cette étude se limiter au cas où $u_1(x) \in [0, 1]$.

Sachant que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $0 \leqslant \sin x \leqslant x$, la suite $(u_n(x))_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers $\ell \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Puisque la fonction $\sin$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ, on a $\sin \ell = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$. En conclusion, la suite de fonctions $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

<u>Convergence uniforme</u>

De $|u_1(x)| \leqslant 1$, on déduit $|u_2(x)| \leqslant \sin 1$ et, par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n(x)| \leqslant u_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Il en résulte $\| u_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = u_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc, d'après l'étude de la convergence simple, $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Ex. 4

Convergence simple

$f_n(0) = \operatorname{Arctan} n$ tend vers $\frac{\pi}{2}$. Pour $x > 0$, $\frac{x+n}{nx+1}$ tend vers $\frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$.

En remarquant que, pour $x > 0$, $\operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$, on conclut que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers $f \;:\; x \mapsto \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$.

Convergence uniforme

- Première solution

En posant $\delta_n(x) = f_n(x) - f(x)$, il vient $\delta_n'(x) = \dfrac{2(1+x^2+2nx)}{(1+x^2)\left[(x+n)^2+(nx+1)^2\right]}$, donc δ_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Alors, de $\delta_n(0) = -\operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \delta_n(x) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$, on déduit $\| \delta_n \|_\infty^{[0,+\infty[} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \| \delta_n \|_\infty^{[0,+\infty[} = 0.$$

En conclusion, la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

- Deuxième solution

On peut éviter l'étude de variation.

Pour $x > 0$, formons $\tan\left(f_n(x) - f(x)\right) = \dfrac{x^2-1}{n(x^2+1)+2x}$.

Puisque $f_n(x) - f(x) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on en déduit $f_n(x) - f(x) = \operatorname{Arctan} \dfrac{x^2-1}{n(x^2+1)+2x}$, et donc :

$$|f_n(x) - f(x)| = \operatorname{Arctan} \frac{\left|x^2-1\right|}{n(x^2+1)+2x}.$$

Sachant que Arctan est croissante, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \operatorname{Arctan} \frac{x^2+1}{n(x^2+1)+2x} \leqslant \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}.$$

Cette inégalité reste vraie pour $x = 0$, il en résulte donc $\| f_n - f \|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$ et on conclut comme précédemment.

Ex. 5

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{x} = 1$, donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Convergence simple

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = +\infty$.

Pour $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-nx} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Pour $x < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-nx} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

La suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme

De $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x) = n$, on déduit $\| f_n \|_\infty^{]0,+\infty[} \geqslant n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f_n \|_\infty^{]0,+\infty[} = +\infty$ et il n'y a pas convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Étudions maintenant s'il y a convergence uniforme sur tout segment.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) = ne^{-(n-1)x} g(x)$ où g est la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^2 e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

La fonction g ainsi définie est continue sur $[0,+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée sur cet intervalle. Posons $M = \| g \|_\infty^{[0,+\infty[}$, on obtient pour tout $x \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant Mne^{-(n-1)x}$.

Fixons alors $a > 0$, il vient pour tout $x \in [a,+\infty[$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant Mne^{-(n-1)a}$ donc $\| f_n \|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant Mne^{-(n-1)a}$, ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$.

En conclusion la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

La majoration préalable a permis d'éviter l'étude des variations de f_n, néammoins celle-ci est faisable.

En calculant $f_n'(x) = \dfrac{nxe^{-nx}}{(1-e^{-x})^3}\left[2 - nx + (n-2)xe^{-x} - 2e^{-x}\right]$, on voit que $f_n'(x)$ est du signe de :

$$u(x) = 2 - nx + (n-2)xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

On forme ensuite $u'(x) = -n + e^{-x}\left[n-(n-2)x\right]$ puis $u''(x) = e^{-x}\left[(n-2)x - 2n + 2\right]$, ceci permet l'étude des variations et du signe de u' puis de u.

Finalement, on trouve que f_n est décroissante sur $[0,+\infty[$ donc, quel que soit $a > 0$, on a $\| f_n \|_\infty^{[a,+\infty[} = f_n(a)$ et la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ résulte de la convergence de la suite numérique $(f_n(a))_{\mathbb{N}}$.

Ex. 6

1) La suite converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = f_n(1) = 0$ et pour $0 < x < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \ln x + n \ln 3 = -\infty$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n x^{2^n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \text{ car } 0 \leqslant f_n(x) \leqslant 3^n x^{2n}.$$

Sachant que $\sup\limits_{t\in[0,1]} t(1-t) = \dfrac{1}{4}$, en écrivant $f_n(x) = 3^n x^{2^n}\left(1 - x^{2^n}\right)$, on voit que $\| f_n \|_\infty^{[0,1]} = \dfrac{3^n}{4}$ (ce maximum est atteint pour $x^{2^n} = \dfrac{1}{2}$).

Il en résulte que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

2) Calculons $\displaystyle\int_0^1 f_n = 3^n\left(\frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}\right) = \frac{3^n \cdot 2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$.

On obtient $\displaystyle\int_0^1 f_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6^n}{2\cdot 4^n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n = +\infty$. Par ailleurs, on a $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n = 0$.

Puisque les deux limites sont distinctes, on retrouve que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Ex. 7

1) Posons $g_n(x) = \sin x(\cos x)^n$, on a $g_n'(x) = (\cos^2 x - n\sin^2 x)\cos^{n-1} x$.

D'où le tableau de variation :

x	0		a_n		$\pi/2$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	b_n	$\searrow$	0

$$a_n = \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$b_n = \sin a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, on a au voisinage de $+\infty$ $b_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{ne}}$.

Donc, puisque $\| g_n \|_\infty^{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} = b_n$, la suite de fonctions $(g_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et il en est de même pour la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ car $\forall x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}|g_n(x)|$.

2) La série $\sum f_n$ est simplement convergente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; en effet, $\sum f_n(0)$ est la série nulle et pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sum f_n(x)$ est une série géométrique de raison $\cos x$ avec $0 \leqslant \cos x < 1$.

La somme est donc la fonction f définie par : $f(0) = 0$ et pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 2$, la fonction f n'est pas continue, or les fonctions f_n sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la série $\sum f_n$ n'est donc pas uniformément convergente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De même puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x)$, la convergence n'est pas uniforme sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par contre, pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\| f_n \|_\infty^{\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]} \leqslant \frac{\pi}{2}(\cos \alpha)^n$ ce qui avec $0 \leqslant \cos \alpha < 1$ montre la convergence normale sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi la série est normalement donc uniformément convergente sur tout segment inclus dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ex. 8

Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum f_n(0)$ est la série nulle donc convergente.

Envisageons maintenant trois cas suivant la position de $|\alpha|$ par rapport à 1.

- $|\alpha| < 1$. $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = x$ donc, pour $x \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum f_n(x)$ est grossièrement divergente.
- $|\alpha| = 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, la suite de terme général $f_n(x)$ est constante, non nulle, donc la série $\sum f_n(x)$ est encore grossièrement divergente.
- $|\alpha| > 1$. Écrivons $f_n(x) = \dfrac{1}{\alpha^n} \cdot \dfrac{\alpha^n x}{1 + \alpha^{2n} x^2}$.

Sachant que pour tout t réel $\left| \dfrac{2t}{1 + t^2} \right| \leqslant 1$, avec égalité si et seulement si $|t| = 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\,|\alpha|^n} \quad \text{et} \quad \| f_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{2\,|\alpha|^n}.$$

Puisque la série géométrique de raison $\dfrac{1}{|\alpha|} < 1$ est convergente, la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Ex. 9

On a $u_n(0) = 0$ et pour $x > 0$, $u_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

L'étude des variations de la fonction $t \mapsto te^{-t}$ donne $\sup\limits_{t \in [0, +\infty[} te^{-t} = \dfrac{1}{e}$.

Donc, en écrivant $u_n(x) = \dfrac{nxe^{-nx}}{n \ln n}$, on obtient $\sup\limits_{x \in [0, +\infty[} u_n(x) = \dfrac{1}{en \ln n}$ et, puisque u_n est clairement positive :

$$\| u_n \|_\infty^{[0, +\infty[} = \frac{1}{en \ln n}.$$

On sait que la série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ est divergente, en conséquence la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

Fixons alors $\alpha > 0$. Pour tout $n \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$, on a $\| u_n \|_\infty^{[\alpha, +\infty[} = u_n(\alpha)$ donc la convergence de $\sum u_n(\alpha)$ donne la convergence normale sur $[\alpha, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum u_n$.

Montrons maintenant que la série converge uniformément sur $[0, +\infty[$ en considérant le reste d'ordre n :

$$R_n \ : \ x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln k}.$$

Une majoration donne $\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln n} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx}$, donc :

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{xe^{-(n+1)x}}{(1-e^{-x})\ln n} \leqslant \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{1}{\ln n}.$$

Notons φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x > 0$ et $\varphi(0) = 1$. Avec $R_n(0) = 0$, la majoration précédente donne $\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{\ln n}$.

Puisque φ est continue sur $[0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, elle est bornée sur cet intervalle, et on obtient :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{1}{\ln n} \cdot \| \varphi \|_\infty^{[0,+\infty[} \text{ donc } \| R_n \|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{\ln n} \cdot \| \varphi \|_\infty^{[0,+\infty[}.$$

En conclusion la suite $(R_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$ ce qui donne la convergence uniforme de $\sum u_n$.

Ex. 10

1) Posons $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

Pour $x \leqslant 0$, la suite $(u_n(x))_{\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente.

Pour $x > 0$ on a, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum u_n(x)$ est convergente.

Finalement la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. Cet intervalle constitue l'ensemble de définition de f.

2) x étant fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, soit $v_x \ : \ [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$.

La fonction v_x est décroissante sur $[0, +\infty[$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_x(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} v_x(t)\mathrm{d}t \leqslant v_x(n)$,

c'est-à-dire :

$$e^{-x\sqrt{n+1}} \leqslant \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leqslant e^{-x\sqrt{n}}.$$

D'autre part la convergence de la série $\sum v_x(n)$ assure que v_x est intégrable sur $[0, +\infty[$ (voir chapitre 2, théorème 10) et en sommant les inégalités précédentes, il vient :

$$\int_0^{+\infty} v_x(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_x(n) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} v_x(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} v_x(t)\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} v_x(t)\mathrm{d}t.$$

Le calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} v_x(t)\mathrm{d}t$ peut se faire au moyen du changement de variable défini par $z = x\sqrt{t}$. Il vient ainsi :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2} \int_0^{+\infty} ze^{-z}\mathrm{d}z = \frac{2}{x^2}\Big[-(z+1)e^{-z}\Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{x^2}.$$

On en déduit $\quad \dfrac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{2}{x^2}, \quad$ et finalement : $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

<u>**Remarque**</u> : on peut arriver à ce résultat en évitant la notion de fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.

Il suffit pour cela de déduire des inégalités $v_x(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} v_x(t)\mathrm{d}t \leqslant v_x(n)$ un encadrement de la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-x\sqrt{k}}$ utilisant l'intégrale $\displaystyle\int_0^n e^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, puis de faire tendre n vers $+\infty$. Cette façon de faire est beaucoup plus lourde et il faudra lui préférer l'utilisation des intégrales sur $[0, +\infty[$ dès que possible.

Niveau 2

Ex. 11

- Convergence simple

Premier cas : $x = 2$

On reconnaît une somme de Riemann.

$$f_n(2) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{n}\right)^2}}, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(2) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ell n(1+\sqrt{2}).$$

Deuxième cas : $x > 2$

Coupons la somme en deux :

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} + \sum_{p=1+E(\sqrt{n})}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} \text{ (E est la fonction «partie entière»),}$$

puis majorons les deux sommes obtenues :

$$\sum_{p=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} \leqslant \frac{E(\sqrt{n})}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{p=1+E(\sqrt{n})}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} \leqslant \sum_{p=1+E(\sqrt{n})}^{n} \frac{1}{p^{\frac{x}{2}}}.$$

Il est alors clair que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} = 0$ et, puisque $\frac{x}{2} > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{p^{\frac{x}{2}}}$ est convergente et on a aussi, d'après le critère de Cauchy, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1+E(\sqrt{n})}^{n} \frac{1}{p^{\frac{x}{2}}} = 0$. En conséquence, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Troisième cas : $x < 2$

Pour $0 \leqslant x < 2$, la fonction $t \mapsto t^x$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et on a donc :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+n^x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n^x}} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant 1.$$

Alors, avec le théorème d'encadrement, $n^2 + n^x \underset{+\infty}{\sim} n^2$ donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.

Pour $x < 0$, la fonction $t \mapsto t^x$ est décroissante et on obtient :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{d'où} \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant f_n(x) \leqslant 1 \text{ puis } \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1.$$

En conclusion, la suite $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x < 2, \ f(2) = \ell n(1+\sqrt{2}), \ f(x) = 0 \text{ si } x > 2.$$

Convergence uniforme

On a affaire à une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont la somme n'est pas continue, il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Par contre chaque fonction f_n étant visiblement décroissante, pour tout $a > 2$, on a $\forall x \in [a, +\infty[, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a)$. Donc $\| f_n \|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant f_n(a)$ et la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

De même, pour tout $b < 2$ on a $\forall x \in]-\infty, b], \quad 0 < 1 - f_n(x) \leqslant 1 - f_n(b)$. Donc $\| 1 - f_n \|_\infty^{]-\infty,b]} \leqslant 1 - f_n(b)$ et la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction constante 1 sur $]-\infty, b]$.

En conclusion, il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans l'un ou l'autre des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$.

Ex. 12

1) Puisqu'elle est continue, la fonction f_0 est bornée sur l'intervalle compact $[a, b]$. Posons $\| f_0 \|_\infty^{[a,b]} = M$.

On obtient alors $\forall x \in [a, b]$, $|f_1(x)| \leqslant \int_a^x M\mathrm{d}t = M(x-a)$,

donc $|f_2(x)| \leqslant \int_a^x M(t-a)\mathrm{d}t = M\dfrac{(x-a)^2}{2}$, et par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant M\dfrac{(x-a)^n}{n!}$.

Il en résulte $\forall n \in \mathbb{N}$, $\| f_n \|_\infty^{[a,b]} \leqslant M\dfrac{(b-a)^n}{n!}$ et, puisque $M\dfrac{(b-a)^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

2) Posons $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ et soit $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x F$.

Pour tout $x \in [a, b]$, la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[a, x]$ et le théorème d'intégration terme à terme donne :

$$\int_a^x F(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) = F(x) - f_0(x)$$

c'est-à-dire

$$G(x) = G'(x) - f_0(x).$$

En résolvant l'équation différentielle $y' = y + f_0(x)$ par la méthode de la variation de la constante, on obtient :

$$G(x) = e^x \int_a^x f_0(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \lambda e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\text{donc} \quad F(x) = f_0(x) + e^x \int_a^x f_0(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \lambda e^x.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $f_n(a) = 0$ donc $F(a) = f_0(a)$ et $\lambda = 0$.

Finalement : $F(x) = f_0(x) + \int_a^x f_0(t)e^{x-t}\mathrm{d}t$.

Ex. 13

Nous avons affaire à la série de terme général : $u_n : [0, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{a^n}{1-x^n}$.

1) Montrons la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout segment $[0, b]$ inclus dans $[0, 1[$.

Pour tout x de $[0, b]$:

$$|u_n(x)| = \frac{|a|^n}{1-x^n} \leqslant \frac{|a^n|}{1-x} \leqslant \frac{|a|^n}{1-b} \quad \text{donc} \quad \| u_n \|_\infty^{[0,b]} \leqslant \frac{|a|^n}{1-b}.$$

La série géométrique de raison $|a| < 1$ est convergente, donc la série de terme général $\| u_n \|_\infty^{[a,b]}$ converge.

<u>Conclusion</u> : la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, b]$ pour tout réel $b \in [0, 1[$.

Il en résulte la convergence simple sur $[0, 1[$, l'existence de la somme :

$$S : [0, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1-x^n}$$

et, d'après le théorème **6**, la continuité de S sur $[0, 1[$.

2) On part de la relation connue : $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Pour tout $a \in]-1, 1[$, la série de fonctions de terme général $x \mapsto x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, a]$ car $\sup_{x \in [0,a]} |x^n| = |a|^n$. En conséquence, le théorème d'intégration terme à terme donne :

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a x^n \mathrm{d}x \ \text{ c'est-à-dire } \ -\ell n(1-a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}.$$

Remarque

On vient en fait d'utiliser une technique propre aux séries entières : intégration terme à terme sur un intervalle compact inclus dans l'intervalle ouvert de convergence (voir le chapitre 5)

3) La solution tient à l'identité et à la limite suivantes :

$$\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{n}.$$

Comme $(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-x}{1-x^n} a^n$, introduisons la série de fonctions de terme général :

$$v_n : [0,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1-x}{1-x^n} a^n.$$

Notons que $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} v_n(x) = \frac{a^n}{n}$.

La convergence normale sur $[0, 1[$ s'obtient par :

$$|v_n(x)| = \frac{|a|^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \leqslant |a|^n \qquad \| v_n \|_\infty^{[0,1[} = |a|^n.$$

Sachant que, pour $|a| < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1-a)$, il suffit d'appliquer le théorème 8 (limite terme à terme) pour obtenir :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} v_n(x) \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1-a).$$

<u>Conclusion</u> :

$$S(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} -\frac{\ln(1-a)}{1-x}.$$

Ex. 14

1) Étudions la série de fonctions de terme général $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n}\cos^n x \sin nx.$

Chaque fonction u_n est impaire de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et de période π.

La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$:

$$u_n(0) = u_n(\pi) = 0 \quad \text{et pour } x \in]0, \pi[, \quad |u_n(x)| \leqslant \frac{|\cos x|^n}{n}$$

(majoration par une série géométrique de raison $|\cos x| < 1$).

Elle a pour somme la fonction f, impaire et π-périodique :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n x \sin nx.$$

2) Un calcul simple donne $u_n'(x) = (\cos x)^{n-1} \cos(n+1)x$.

La série $\sum u_n'$ est normalement convergente sur $[a, \pi - a]$ pour tout $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car :

$$|u_n'(x)| \leqslant |\cos x|^{n-1} \leqslant |\cos a|^{n-1} \quad \text{donc} \quad \| u_n' \|_\infty^{[a,\pi-a]} \leqslant |\cos a|^{n-1},$$

et la série géométrique de raison $|\cos a|$ est convergente.

Le théorème de «dérivation terme à terme» s'applique, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et, compte tenu de la π-périodicité, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ avec :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos x)^{n-1} \cos(n+1)x.$$

Le calcul utilise $\cos(n+1)x = \operatorname{Re} e^{i(n+1)x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(\cos x)^{n-1}\, e^{i(n+1)x}\right) \\ f'(x) &= \operatorname{Re}\frac{e^{2ix}}{1-\cos x\cdot e^{ix}} = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}}{e^{-ix}-\cos x}\right) \\ f'(x) &= -1 \quad \text{pour tout} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3) Comme f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,\pi[$, il existe un réel C tel que $f(x)=C-x$.

Or, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ pour tout $x\in]0,\pi[$.

On complète la description de f sachant qu'elle est π-périodique et nulle en tout point de $\pi\mathbb{Z}$.

Observer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Ex. 15

La suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée. Il sera utile de noter $M_n=\sup\limits_{i\geqslant n}|a_i|$ et d'observer que la suite réelle $(M_n)_{\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et qu'elle converge vers 0.

1) L'existence de f tient à l'absolue convergence de $\sum\frac{x^n}{n!}$ car $\left|\frac{a_nx^n}{n!}\right|\leqslant M_0\frac{|x^n|}{n!}$ (puis critère de domination des séries à termes positifs).

2) Comme $e^{-x}f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_nx^n}{n!}e^{-x}$, introduisons la série de fonctions de terme général :

$$u_n\ :\ [0,+\infty[\to\mathbb{C},\quad x\mapsto\frac{a_n}{n!}x^ne^{-x}.$$

Nous avons déjà la convergence simple et la somme, établissons la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.

Le reste d'ordre n est $R_n\ :\ [0,+\infty[\to\mathbb{C},\quad x\mapsto\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{a_kx^k}{k!}e^{-x}$

et une majoration $|R_n(x)|\leqslant\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{|a_k|}{k!}x^ke^{-x}\leqslant M_n\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{x^ke^{-x}}{k!}\leqslant M_n$ (car $\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\leqslant e^x$).

Ainsi $\|R_n\|_\infty^{[0,+\infty[}=\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|R_n(x)|\leqslant M_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\|R_n\|_\infty^{[0,+\infty[}=0$.

La suite $(R_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Appliquons le théorème de la limite terme à terme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\right]=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left[\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)\right]$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}f(x)=0$ donc $f(x)=o(e^x)$ quand $x\to+\infty$.

Ex. 16

Considérons la série de fonctions $\sum u_j$ de $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*,\mathbb{R})$ où les u_j sont définis par :

$$u_j\ :\ [1,+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\left(1-\dfrac{j}{x}\right)^x & \text{si } x\geqslant j,\\ 0 & \text{si } x<j.\end{cases}$$

On obtient alors l'égalité $S(n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum\limits_{j=0}^{n}\left(1-\frac{j}{n}\right)^n=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}u_j(n)$.

Pour établir la convergence normale sur $[1,+\infty[$ de cette série de fonctions, étudions la fonction :

$$\varphi_j\ :\ ]j,+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x\ln\left(1-\frac{j}{x}\right).$$

Calculons $\varphi_j'(x) = \ln\left(1 - \frac{j}{x}\right) + \frac{j}{x-j} = -\ln\left(1 + \frac{j}{x-j}\right) + \frac{j}{x-j} \geqslant 0$ (utiliser $\ln(1+u) \leqslant u$).

Ainsi la fonction φ_j est croissante, il en est de même pour u_j et :

$$\|u_j\|_\infty^{[1,+\infty[} = \lim_{x\to+\infty} u_j(x) = e^{-j}$$

La série géométrique $\sum e^{-j}$ est convergente, donc $\sum u_j$ converge normalement sur $[1,+\infty[$.

On dispose alors du théorème de la limite terme à terme :

$$\lim_{n\to+\infty} S(n) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_j(n) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j} = \frac{e}{e-1}.$$

Ex. 17

Fixons z dans $\mathbb{C}$ et appliquons la formule du binôme, il vient :

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{z^k}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(n)$$

où on a introduit la série de fonctions $\sum u_k$ de $\mathcal{F}([1,+\infty[,\mathbb{C})$, telle que :

$$u_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{x^k}\cdot\frac{z^k}{k!} \text{ si } x \geqslant k \quad , \quad u_k(x) = 0 \text{ si } x < k.$$

La convergence normale sur $[1,+\infty[$ de cette série $\sum u_k$ résulte de :

$$\|u_k\|_\infty^{[1,+\infty[} = \sup_{x\in[k,+\infty[} \left(1-\frac{1}{x}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{x}\right)\frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^k}{k!} \quad \text{avec} \quad \sum \frac{|z|^k}{k!} \text{ convergente.}$$

Le théorème de la limite terme à terme peut donc s'appliquer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_k(n).$

C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Ex. 18

P_n est un polynôme impair de degré $2n+1$ donc Q_n est un polynôme pair de degré $2n+2$.

Pour $x \in [0,1]$, étudions $Q_n(x) - x$:

$$Q_n(x) - x = \frac{1}{P_n(1)}\int_0^x\left(\int_1^u (1-t^2)^n \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

$$|Q_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{P_n(1)}\int_0^1\left(\int_u^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

$$|Q_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{P_n(1)}\int_0^1 u(1-u^2)^n \mathrm{d}u \quad \text{(intégrer par parties)}$$

$$|Q_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{2(n+1)P_n(1)}.$$

On en déduit :

$$\|Q_n - A\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{1}{2(n+1)P_n(1)}.$$

Il reste à étudier la suite $n \longmapsto nP_n(1)$.

Une solution consiste à reconnaître une intégrale de Wallis : le changement de variable défini par $t = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donne $P_n(1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = W_{2n+1}$ et on en déduit $P_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ (voir par exemple la démonstration de la formule de Stirling dans le chapitre 2). Il vient alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nP_n(1) = +\infty$.

Voyons une autre méthode. Une intégration parties donne : $(2n+1)P_n(1) = 2nP_n(1)$, ce qui s'écrit aussi :

$$(2n+1)P_n(1) - (2n-1)P_n(1) = P_{n-1}(1).$$

Cette formule montre que la suite $\big((2n+1)P_n(1)\big)_{\mathbb{N}^*}$ est croissante et de même nature que la série de terme général $P_{n-1}(1)$ (cf. chapitre **2**, théorème **2**).

Puisqu'elle est positive croissante, la suite $\big((2n+1)P_n(1)\big)_{\mathbb{N}^*}$ admet une limite $a > 0$ finie ou infinie. En supposant $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire a finie, il vient $P_{n-1}(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{2n-1}$, donc $\Sigma P_n(1)$ diverge et il en est de même pour la suite $\big((2n+1)P_n(1)\big)_{\mathbb{N}^*}$. C'est contradictoire, donc $a = +\infty$.

<u>Conclusion</u> :

$\| Q_n - A \|_\infty^{[-1,1]} = \| Q_n - A \|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)P_n(1)}$ donne la convergence uniforme sur $[-1, 1]$ de (Q_n) vers A.

Ex. 19

1) Pour $x \in [0, 1]$, posons $u_n = P_n(x)$.

On a affaire à une suite récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f \ : \ x \mapsto -\dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{x}{2}$ et $u_0 = 0$.

La fonction f est continue strictement croissante sur $[0, 1]$ et $f\big([0, 1]\big) = \left[\dfrac{x}{2}, \dfrac{1+x}{2}\right] \subset [0, 1]$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$ puis que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante, majorée, donc convergente vers ℓ unique point fixe de f sur $[0, 1]$, c'est-à-dire $\ell = \sqrt{x}$.

Ainsi la suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction racine carrée $R \ : \ x \mapsto \sqrt{x}$.

2) L'inégalité **(1)** résulte de ce que $\sqrt{x}$ est limite de la suite croissante $\big(P_n(x)\big)_{\mathbb{N}}$.

L'inégalité **(2)** peut se montrer par récurrence : propriété (H_n).

(H_0) est vraie. On suppose (H_n) vraie. Alors, en écrivant :

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \Big(\sqrt{x} - P_n(x)\Big)\Big(1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{x} + P_n(x)\big)\Big),$$

avec (H_n), on obtient : $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leqslant \dfrac{2\sqrt{x}\big(2 + (n-1)\sqrt{x} - nx\big)}{\big(2 + n\sqrt{x}\big)^2} \leqslant \dfrac{2\sqrt{x}\big(2 + (n-1)\sqrt{x}\big)}{\big(2 + n\sqrt{x}\big)^2}$.

Il reste à remarquer que $\big(2 + (n+1)\sqrt{x}\big)\big(2 + (n-1)\sqrt{x}\big) \leqslant \big(2 + n\sqrt{x}\big)^2$ pour obtenir :

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}$$

ce qui prouve que (H_{n+1}) est vraie.

<u>Convergence uniforme</u> En utilisant la croissance de $t \mapsto \dfrac{2t}{2 + nt}$, les inégalités **(1)** et **(2)** donnent :

$$\|P_n - R\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{2}{n+2}.$$

3) La suite $(Q_n)_{\mathbb{N}}$ définis par $Q_n(x) = P_n(x^2)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction $A \ : \ x \mapsto |x|$.

Ex. 20

Il s'agit d'étudier la série de terme général $\quad u_n \ : \ x \mapsto (-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^2 + x^2}$.

La convergence simple sur $\mathbb{R}$ s'obtient grâce au théorème des séries alternées (ou critère de Leibniz).

En effet, quel que soit x réel, $u_n(x)$ tend vers 0 et $n \mapsto |u_n(x)|$ décroît dès que $n \geqslant |x|$.

Le fait que cette décroissance ne soit acquise qu'à partir d'un rang, dépendant de x, rend impossible une majoration uniforme du reste d'ordre n avec le théorème des séries alternées :

en posant $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$ on n'a $|R_n(x)| \leqslant |u_n(x)|$ que pour $n \geqslant |x|$.

Considérons d'abord $R_{2n}(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \big(u_{2k}(x) + u_{2k+1}(x)\big)$.

En formant $u_n(x)+u_{n+1}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{n^2+n-x^2}{(n^2+x^2)\left((n+1)^2+x^2\right)}$, on obtient $|u_n(x)+u_{n+1}(x)|\leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Il en résulte $\|R_{2n}\|_\infty^{\mathbb{R}}\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{4k^2}$ donc, puisque $\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{4k^2}$ et le reste d'une série convergente, la suite $(R_{2n})_{\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

En remarquant que $\|R_{2n+1}\|_\infty^{\mathbb{R}}\leqslant\|u_{2n}\|_\infty^{\mathbb{R}}+\|R_{2n}\|_\infty^{\mathbb{R}}$ et que $\|u_{2n}\|_\infty^{\mathbb{R}}=\dfrac{1}{n}$, on voit qu'il en est de même pour la suite $(R_{2n+1})_{\mathbb{N}^*}$. Finalement $(R_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ d'où la conclusion.

Ex. 21

Convergence simple

On sait (cf. chapitre 2, exemple 11) que, quel que soit x réel, $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$, il en résulte que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $F\ :\ x\mapsto e^{-2x}$.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$

Formons $F(x)-u_n(x)=e^{-x}\left(e^{-x}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{x^k}{k!}\right)$.

La formule de Taylor avec reste intégral fournit $e^{-x}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{x^k}{k!}=\int_0^x\dfrac{(x-t)^n}{n!}(-1)^{n+1}e^{-t}\mathrm{d}t$, d'où :

$$\text{pour tout } x\geqslant 0,\ \ |F(x)-u_n(x)|\leqslant e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

L'étude des variations de la fonction $f_n\ :\ x\mapsto x^ne^{-x}$ donne $\sup\limits_{[0,+\infty[} f_n(x)=n^ne^{-n}$ d'où $\|F-u_n\|_\infty^{[0,+\infty[}\leqslant\dfrac{n^ne^{-n}}{n!}$ et la formule de Stirling montre la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.

Convergence uniforme locale sur $]-\infty,0]$

Pour tout $a>0$, on a $\forall x\in[-a,0],\ |F(x)-u_n(x)|\leqslant e^a\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{a^k}{k!}$.

La convergence uniforme sur $[-a,0]$ en résulte.

Sur $]-\infty,0]$, on a $F(x)-u_{n-1}(x)\geqslant e^{-x}\dfrac{|x|^n}{n!}$ donc $\sup\limits_{]-\infty,0]}F(x)-u_{n-1}(x)\geqslant\dfrac{e^nn^n}{n!}$ (prendre $x=-n$).

La formule de Stirling donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^nn^n}{n!}=+\infty$ et la convergence n'est pas uniforme sur $]-\infty,0]$.

Ex. 22

1) On pose $u_n(x)=\dfrac{n^{-x}}{\ln n}$. La série $\sum u_n(x)$ converge si et seulement si $x>1$. L'ensemble de définition de f est donc $D_f=]1,+\infty[$.

2) Les fonctions u_n sont de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ avec pour tout $p\in\mathbb{N}$, $u_n^{(p)}(x)=(-1)^p(\ln n)^{p-1}e^{-x\ln n}$.

Pour tout $a>1$ et tout $p\in\mathbb{N}$, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Il en résulte que f est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ (voir théorème 13, corollaire 2).

3) Étude au voisinage de $+\infty$

La convergence étant uniforme sur $[2,+\infty[$, le théorème de la limite terme à terme donne $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

On voit que le premier terme de la série est dominant lorsque x tend vers $+\infty$, d'où l'idée de le factoriser :

$$f(x)=\frac{2^{-x}}{\ln 2}\left[1+\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^{-x}\frac{\ln 2}{\ln n}\right].$$

La série de fonctions de terme général $x \mapsto \left(\frac{n}{2}\right)^{-x} \frac{\ln 2}{\ln n}$ est encore normalement convergente sur toute demi-droite $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ donc, comme précédemment :

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^{-x} \frac{\ln 2}{\ln n} = 0.$$

La factorisation donne alors $\quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{2^{-x}}{\ln 2}$.

<u>Étude au voisinage de 1</u>

Pour $x > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x \ln t}$ est positive, décroissante, et intégrable sur $[2, +\infty[$, on obtient donc l'encadrement :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x \ln t} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2^{-x}}{\ln 2} + \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x \ln t}.$$

Deux intégrations par parties successives donnent :

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{t^{-x}}{\ln t}\mathrm{d}t &= \frac{2^{1-x}}{(x-1)\ln 2} + \frac{1}{1-x}\int_2^{+\infty} \frac{t^{-x}}{\ln^2 t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2^{1-x}}{(x-1)\ln 2} - \frac{2^{1-x}}{(x-1)^2 \ln^2 2} + \frac{2}{(x-1)^2}\int_2^{+\infty} \frac{t^{-x}}{\ln^3 t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Alors, avec $\quad 0 < \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x \ln^3 t} \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^3 t}$ et le calcul précédent, il vient quand x tend vers 1 :

$$\int_2^{+\infty} \frac{t^{-x}}{\ln t}\mathrm{d}t = \frac{1}{(x-1)\ln 2} + O\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right).$$

Finalement $\quad f(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x > 1}}{\sim} \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Ex. 23

1) Posons $u_n(x) = (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

$\sum u_n(0)$ est la série nulle et, pour $x \neq 0$, $\sum u_n(x)$ est une série alternée convergente d'après le critère de Leibniz. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Notons $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$. D'après le théorème des séries alternées, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|$,

on en déduit $\quad \| R_n \|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, la série est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

En conséquence, le théorème de la limite terme à terme donne $\quad \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Il reste à calculer la somme de cette série, formons donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= 2\sum_{k=1}^{n} \ln(2k) - 2\sum_{k=1}^{n} \ln(2k+1) + \ln(2n+1) \\ &= \ln\left(\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\right).\end{aligned}$$

Alors la formule de Stirling donne $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Ex. 24

Pour x réel fixé, on considère la série de fonctions de terme général $u_n\ :\ t \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}e^{nx(1-t)}f(t)$.

La fonction f étant continue sur $[0,1]$, elle est bornée. Posons donc $M = \|f\|_\infty^{[0,1]}$, on obtient :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*\ \|u_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant M\frac{e^{n|x|}}{n!}.$$

Puisque la série de terme général $M\dfrac{X^n}{n!}$ ($X = e^{|x|}$) est convergente, il en résulte que $\sum u_n$ est normalement donc uniformément convergente sur $[0,1]$.

En conséquence, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\left[1 - e^{-e^{x(1-t)}}\right]f(t)\mathrm{d}t$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t,$$

et on est donc ramené à démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 f(t)e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t = 0$.

On suppose $x > 0$, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ on a :

$$0 \leqslant \int_0^{1-\varepsilon} e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t \leqslant e^{-e^{\varepsilon x}} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \int_{1-\varepsilon}^1 e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que pour x assez grand, $\displaystyle\left|\int_0^1 f(t)e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t\right| \leqslant 2M\varepsilon$, ce qui assure la conclusion.

Pour une deuxième lecture

Le théorème de convergence dominée (cf. chapitre 6) donne une autre démonstration.

Soit $(x_n)_\mathbb{N}$ une suite de réels positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons g_n la fonction $t \mapsto e^{-e^{x_n(1-t)}}$. $(g_n)_\mathbb{N}$ est une suite de fonctions continues donc intégrables sur $[0,1]$ convergeant simplement sur cet intervalle vers la fonction g définie par $g(t) = 0$ si $t \in [0,1[$ et $g(1) = \dfrac{1}{e}$. Cette fonction g est continue par morceaux sur $[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant g_n \leqslant 1$. Dans ces conditions, le théorème de convergence dominée donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$ c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = 0$.

Ceci étant vrai quelle que soit la suite $(x_n)_\mathbb{N}$ de limite infinie, il en résulte, d'après la caractérisation séquentielle des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t = 0$.

Niveau 3

Ex. 25

1) Posons $u_n(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{n^2+x^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ donc $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Remarquons que u_n est impaire et que pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \operatorname{Arctan} x \leqslant x$.
Pour tout $a > 0$, on a donc :

$$\forall x \in [-a,a],\quad |u_n(x)| \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{a}{n^2} \leqslant \frac{a}{n^2} \quad \text{donc } \|u_n\|_\infty^{[-a,a]} \leqslant \frac{a}{n^2}.$$

Ainsi $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-a,a]$. Puisqu'il s'agit d'une série de fonctions continues, cette convergence uniforme locale sur $\mathbb{R}$ donne que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) $R_n(2n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2n}{4n^2+k^2}\right) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2n}{4n^2+k^2}\right) \geqslant n \operatorname{Arctan}\left(\frac{2n}{8n^2}\right)$ soit :

$$R_n(2n) \geqslant n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{4n}\right).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{Arctan} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$, on a $\|R_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \geqslant \frac{1}{4}$, donc $\|R_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ ne tend pas vers 0 et la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

4) Par décroissance de $t \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2}$ ($x > 0$ fixé) il vient :

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt.$$

Avec $\operatorname{Arctan} u \leqslant u$ pour $u > 0$, on en déduit $f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$ **(1)**.

Sur $[0, +\infty[$, la fonction Arctan est concave donc, pour tout $u > 0$ et tout $v \in [0, u]$, on a $\operatorname{Arctan} v \geqslant \frac{v}{u} \operatorname{Arctan} u$.

Quand t décrit $[1, +\infty[$, $\frac{x}{x^2+t^2}$ décrit $\left]0, \frac{x}{x^2+1}\right] \subset \left]0, \frac{1}{x}\right]$ et sur cet intervalle $\left]0, \frac{1}{x}\right]$, on a :

$$\operatorname{Arctan} u \geqslant u\,x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad \forall t \in [1, +\infty[,\ \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2} \geqslant \frac{x^2}{x^2+t^2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}.$$

Il en résulte $f(x) \geqslant x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right) \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ **(2)**.

Avec $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = 1$, les inégalités (1) et (2) donnent $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.
Puisque le théorème de la limite terme à terme ne s'applique pas, on retrouve que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Ex. 26

1) Posons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch} nx}$. Les u_n sont paires, on se limite donc à $x \geqslant 0$.

Pour $x > 0$, on a $|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{e^{nx}}$ d'où la convergence de la série $\sum u_n(x)$.

Pour $x = 0$, $u_n(0) = (-1)^n$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum u_n(0)$ diverge.

Finalement l'ensemble de définition D de f est $\mathbb{R}^*$.

2) Pour tout $\alpha > 0$, on a $\|u_n\|_\infty^{[\alpha,+\infty[} = \frac{1}{\operatorname{ch} n\alpha}$, la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement donc uniformément convergente sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Comme il s'agit d'une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'après la parité, elle est également continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

3) Une simple vérification donne : $\quad \forall x \in D,\ f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\operatorname{ch} nx} - \frac{1}{\operatorname{ch}(n+1)x}\right).$

4) • Convexité de $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$. $\quad$ On calcule $\varphi'(x) = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$, $\varphi''(x) = \frac{\operatorname{sh}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^3 x}$.

Donc en posant $\alpha = \operatorname{Argsh} 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, on a $\forall x \in [0, \alpha[$, $\varphi''(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha, +\infty[$, $\varphi''(x) > 0$: φ est concave sur $[0, \alpha]$ et convexe sur $[\alpha, +\infty[$.

• $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\quad$ Posons $v_n = \frac{1}{\operatorname{ch} nx} - \frac{1}{\operatorname{ch}(n+1)x}$ et pour tout $x > 0$, $n_x = E\left(\frac{\alpha}{2x} - \frac{1}{2}\right)$ (donc $2n_x + 1 \leqslant \frac{\alpha}{x}$).

Alors la formule du 3) donne : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{2n_x} (-1)^n v_n + \frac{1}{2}\sum_{n=2n_x+4}^{+\infty} (-1)^n v_n - \frac{1}{2} v_{2n_x+1} + \frac{1}{2} v_{2n_x+2} - \frac{1}{2} v_{2n_x+3}$.

Pour tout $n \in [\![1, 2n_x]\!]$, on a $0 \leqslant (n-1)x < (n+1)x \leqslant \alpha$ donc la concavité de φ sur $[0, \alpha]$ donne :
$$v_{n-1} - v_n = \varphi\big((n-1)x\big) + \varphi\big((n+1)x\big) - 2\,\varphi\,(nx) \leqslant 0.$$
Il en résulte :
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{2n_x}(-1)^n v_n &= v_0 + \sum_{k=1}^{n_x}\big(v_{2k} - v_{2k-1}\big) \geqslant v_0 > 0 \\ \text{et} \quad \sum_{n=0}^{2n_x}(-1)^n v_n &= \sum_{k=0}^{n_x-1}\big(v_{2k} - v_{2k+1}\big) + v_{2n_x} \leqslant v_{2n_x} \end{aligned}$$
c'est-à-dire
$$0 < \sum_{n=0}^{2n_x}(-1)^n v_n \leqslant v_{2n_x}.$$
De même, pour $n \geqslant 2n_x + 4$, on a $\alpha \leqslant (n-1)x$ donc la convexité de φ sur $[\alpha, +\infty[$ donne $v_{n-1} - v_n \geqslant 0$ et alors, d'après le théorème des séries alternées, la somme $\displaystyle\sum_{n=2n_x+4}^{+\infty}(-1)^n v_n$ est du signe de son premier terme et majorée en valeur absolue par v_{2n_x+4}.
On en déduit :
$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(v_{2n_x} + v_{2n_x+1} + v_{2n_x+2} + v_{2n_x+3} + v_{2n_x+4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} 2n_x x} - \frac{1}{\operatorname{ch}\,(2n_x+5)x}\right).$$
En remarquant que lorsque x tend vers 0, on a $E\left(\dfrac{\alpha}{2x} - 1\right) \sim \dfrac{\alpha}{2x}$, il vient $\lim\limits_{x\to 0} 2xn_x = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2xn_x + 5x = \alpha$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{ch}\,(2xn_x)} - \dfrac{1}{\operatorname{ch}\,(2xn_x + 5)} = 0$ et finalement $\lim\limits_{x\to 0} = f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Ex. 27

1) Considérons pour x donné dans $[0, 1]$ la fonction :
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, e^{kt} x^k (1-x)^{n-k} = \left[x\,e^t + (1-x)\right]^n,$$
intéressante pour ses dérivées en 0 : $\quad \varphi^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, k^p x^k (1-x)^{n-k}.$

Ainsi $\quad B_n(1) = \varphi(0), \quad B_n(x) = \dfrac{\varphi'(0)}{n} \quad$ et $\quad B_n(x^2) = \dfrac{\varphi''(0)}{n^2}.$

Les dérivées de φ en 0 s'obtiennent par développement limité :
$$\varphi(t) = \left[1 + xt + \frac{1}{2}xt^2 + o\,(t^2)\right]^n = 1 + nxt + (nx + n(n-1)x^2)\frac{t^2}{2} + o\,(t^2)$$
ce qui donne directement les trois résultats :
$$B_n(1) = 1 \quad , \quad B_n(x) = x \quad , \quad B_n(x^2) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

2) Le développement $\left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2 = \dfrac{k^2}{n^2} - 2\dfrac{k}{n}x + x^2$ donne :
$$\begin{aligned} g_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} = B_n(x^2) - 2xB_n(x) + x^2 B_n(1) \\ g_n(x) &= \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

3) Pour établir la convergence uniforme de $\left(B_n(f)\right)_{\mathbb{N}}$ vers f, formons la différence :
$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^k(1-x)^{n-k}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuité de f sur $[0, 1]$ donne qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, \quad |u - v| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $x \in [0, 1]$, considérons alors la partition de $[\![0, n]\!]$ formée de :

$$I_n = \left\{ k / \left| \frac{k}{n} - x \right| < \alpha \right\} \quad , \quad J_n = \left\{ k / \left| \frac{k}{n} - x \right| \geqslant \alpha \right\}.$$

On a ainsi $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k \in I_n} \mathrm{C}_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \varepsilon \sum_{k \in I_n} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \varepsilon.$

Pour majorer $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k \in J_n} \mathrm{C}_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}$, observons d'abord que :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant 2 \|f\|_\infty^{[0,1]}$$

et il vient :

$$v_n \leqslant 2 \|f\|_\infty^{[0,1]} \sum_{k \in J_n} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Remarquons ensuite que, pour $k \in J_n$, $\quad \left| \dfrac{k}{n} - x \right| \geqslant \alpha \quad$ soit $\quad 1 \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2} \left(\dfrac{k}{n} - x \right)^2$, et on obtient :

$$v_n \leqslant \frac{2 \|f\|_\infty^{[0,1]}}{\alpha^2} \sum_{k \in J_n} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{2 \|f\|_\infty^{[0,1]}}{\alpha^2} g_n(x)$$

d'où enfin $\quad v_n \leqslant \dfrac{2 \|f\|_\infty^{[0,1]}}{n \alpha^2} \displaystyle\sup_{x \in [0,1]} x(1-x) \quad$ soit $\quad v_n = \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty^{[0,1]}}{2n\alpha^2}.$

Rassemblons ces deux majorations : $\quad |f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant u_n + v_n \leqslant \varepsilon + \dfrac{\|f\|_\infty^{[0,1]}}{2n\alpha^2}.$

Il est possible de choisir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_\varepsilon$: $\dfrac{\|f\|_\infty^{[0,1]}}{2n\alpha^2} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour conclure à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_\varepsilon, \quad \|f - B_n(f)\|_\infty^{[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui traduit l'uniforme convergence sur $[0, 1]$ de la suite de polynômes $\left(B_n(f)\right)_{\mathbb{N}}$ vers la fonction f.

Ex. 28

1) Posons $u_n : x \mapsto \dfrac{\sin n! x}{n!}$.

On a $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n!}$ et la série converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$; sa fonction somme f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2) Avec $h = \dfrac{2\pi}{p!}$, il vient $u_n(x + h) - u_n(x) = \dfrac{2}{n!} \sin\left(\dfrac{\pi n!}{p!} \right) \cos\left(n! \left(x + \dfrac{\pi}{p!} \right) \right)$.

Pour $n \geqslant p$, on a $\dfrac{n!}{p!} \in \mathbb{N}$ donc $\sin\left(\pi \dfrac{n!}{p!} \right) = 0$ et :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{p!}{\pi n!} \sin\left(\pi \frac{n!}{p!} \right) \cos\left(n! \left(x + \frac{\pi}{p!} \right) \right).$$

3) Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|\sin x - x| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$ donc $\left| \dfrac{\sin x}{x} - 1 \right| \leqslant \dfrac{x^2}{6}$, il vient :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-A_p\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{p-1}\frac{\pi^2(n!)^2}{6(p!)^2}\left|\cos\left(n!\left(x+\frac{\pi}{p!}\right)\right)\right| \\ &\leqslant \frac{\pi^2}{6}p\left(\frac{(p-1)!}{p!}\right)^2=\frac{\pi^2}{6p}.\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-A_p\right)=0$ et $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a une limite réelle quand $h\to 0$ (c'est-à-dire quand $p\to+\infty$) si et seulement si A_p en a une.

4) $A''_p=\sum\limits_{n=0}^{p-1}\sin(n!x)\sin\left(n!\dfrac{\pi}{p!}\right)$. De $|\sin x|\leqslant|x|$ on déduit :

$$\begin{aligned}\left|A''_p\right| &\leqslant \frac{\pi}{p!}\sum_{n=0}^{p-1}n!=\pi\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p(p-1)}+\cdots+\frac{1}{p!}\right) \\ \left|A''_p\right| &\leqslant \pi\left(\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p(p-1)}\right)=\frac{2\pi}{p}\quad\text{donc}\quad\lim_{p\to+\infty}A''_p=0\end{aligned}$$

$$A'_p=\sum_{n=0}^{p-1}\cos(n!x)\cos\left(n!\frac{\pi}{p!}\right)\quad,\quad B_p=\sum_{n=0}^{p-1}\cos(n!x).$$

Sachant que $|\cos x-1|\leqslant\dfrac{x^2}{2}$, on obtient $\left|A'_p-B_p\right|\leqslant\dfrac{\pi^2}{2}\sum\limits_{n=0}^{p-1}\dfrac{(n!)^2}{(p!)^2}\leqslant\dfrac{\pi^2}{2p}$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty}(A'_p-B_p)=0$ et A'_p a une limite réelle quand $p\to+\infty$ si et seulement si B_p en a une.

5) Avec $A_p=A'_p-A''_p$, il résulte de 3) et 4) que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{p-1}\cos(n!x)$ existe c'est-à-dire si et seulement si la série de terme général $v_n=\cos(n!x)$ converge.

Sachant que $\cos(n!x)$ ne tend pas vers 0 quand $n\to+\infty$, la série $\sum v_n$ diverge en tout point de $\mathbb{R}$ et $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a pas de limite. Ainsi f n'est pas dérivable en x et ceci quel que soit $x\in\mathbb{R}$!

Ex. 29

La suite $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f\ :\ x\mapsto e^{-x^2}$.

La concavité de la fonction ℓn donne $\forall x\in\mathbb{R},\ \ \ell n\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)\leqslant\dfrac{x^2}{n}$, donc :

$$f_n(x)\geqslant e^{-x^2}\quad\text{et}\quad|f(x)-f_n(x)|=\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}-e^{-x^2}.$$

On considère alors la fonction $g_n\ :\ [0,+\infty[\to\mathbb{R}_+,\ \ t\mapsto\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{-n}-e^{-t}$.

Le calcul donne $g'_n(t)=e^{-t}\left(1-e^{\varphi(t)}\right)$ avec $\varphi(t)=t-(n+1)\ell n\left(1+\dfrac{t}{n}\right)$.

Les variations de φ montrent qu'il existe t_n unique appartenant à $]1,+\infty[$ tel que $\varphi(t_n)=0$, $\varphi(t)<0$ pour $t\in]0,t_n[$ et $\varphi(t)>0$ pour $t>t_n$. On en déduit $\sup\limits_{t\in[0,+\infty[}g_n(t)=g_n(t_n)$.

La condition $\varphi(t_n)=0$ donne $1+\dfrac{t_n}{n}=e^{\frac{t_n}{n+1}}$, on a donc aussi $g_n(t_n)=e^{-t_n}\left(e^{\frac{t_n}{n+1}}-1\right)$ d'où :

$$\|f-f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}=g_n(t_n)\leqslant e^{\frac{t_n}{n+1}}-1.$$

Pour conclure il reste à étudier la suite de terme général $y_n=\dfrac{t_n}{n}$.

L'équation $\varphi(t_n) = 0$ s'écrit aussi $\psi(y_n) = \dfrac{n}{n+1}$ où ψ est la fonction $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto \dfrac{\ell n(1+y)}{y}$.

On montre que ψ est un homéomorphisme décroissant de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$. On a donc :

$$y_n = \psi^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

Alors $\| f - f_n \|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant e^{\frac{n}{n+1} y_n} - 1$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f - f_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = 0$.

Ex. 30

Pour tout n, on a $a_n = |z_n|$ où z_n est une racine du polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

Si $|z_n|$ ne tend pas vers $+\infty$, on peut extraire de $\left(|z_n|\right)_{\mathbb{N}}$ une suite bornée puis, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de cette suite bornée une suite $\left(z_{\varphi(n)}\right)_{\mathbb{N}}$ convergente. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} z_{\varphi(n)}$.

Par construction, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|z_{\varphi(n)}\right| \leqslant a$.

La série de fonctions (en fait série entière) de terme général $z \mapsto \dfrac{z^n}{n!}$ étant normalement convergente sur le disque compact $D_a = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leqslant a\}$, en notant R_n le reste d'ordre n de cette série, la majoration :

$$\left| e^\ell - \sum_{k=0}^{\varphi(n)} \frac{z_{\varphi(n)}^k}{k!} \right| \leqslant \left| e^\ell - e^{z_{\varphi(n)}} \right| + \left| \sum_{k=\varphi(n)+1}^{+\infty} \frac{z_{\varphi(n)}^k}{k!} \right| \leqslant \left| e^\ell - e^{z_{\varphi(n)}} \right| + \| R_{\varphi(n)} \|_\infty^{D_a}$$

donne :

$$\lim_{n\to+\infty} e^\ell - P_{\varphi(n)}\left(z_{\varphi(n)}\right) = 0.$$

Puisque, par définition, $P_{\varphi(n)}\left(z_{\varphi(n)}\right) = 0$ pour tout n, on obtient finalement $e^\ell = 0$ ce qui est à rejeter.

Ex. 31

Nous allons utiliser le deuxième théorème de Weierstrass.

On commence par vérifier que la propriété est vraie pour $f_p\ :\ x \mapsto e^{2i\pi px}$, $(p \in \mathbb{Z})$.

Puisque $\lambda \notin \mathbb{Q}$, pour $p \neq 0$ on a $e^{2ip\pi\lambda} \neq 1$ et le calcul de $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi k\lambda}$ donne :

$$|u_n| \leqslant \frac{2}{n\,|\sin p\,\pi\,\lambda|} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 = \int_0^1 f_p.$$

Si $p = 0$, on a $u_n = 1 = \displaystyle\int_0^1 f_0$.

Par linéarité, on en déduit que la propriété reste vraie pour tout polynôme trigonométrique 1-périodique :

$$f\ : x \mapsto \sum_{p=u}^{p=v} a_p e^{2ip\pi x}, \quad (u, v) \in \mathbb{Z}^2.$$

La fonction f, continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique, est limite uniforme d'une suite $(P_q)_{\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques 1-périodiques.

Avec $u_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k\lambda)$, on obtient pour tout q la majoration :

$$\left| u_n(f) - \int_0^1 f \right| \leqslant 2\| f - P_q \|_\infty^{\mathbb{R}} + \left| u_n(P_q) - \int_0^1 P_q \right|.$$

Pour conclure, à $\varepsilon > 0$ on associe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\| f - P_q \|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$ et on utilise que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| u_n(P_q) - \displaystyle\int_0^1 P_q \right| = 0$.

CHAPITRE 4

Dérivation Intégration sur un segment

A. Dérivation des fonctions vectorielles

E, F et G sont des espaces vectoriels normés de dimensions finies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point donc tel que $\overset{\circ}{I} \neq \varnothing$.

1. Dérivation

Les notions de dérivabilité et de dérivée sont usuelles pour les fonctions réelles ou complexes. On se propose dans cette section de les étendre aux fonctions vectorielles.
Certaines propriétés sont données sans démonstration (ou avec une justification succincte) car celles-ci sont pratiquement identiques à celles qui ont été données en première année dans le cadre des fonctions numériques.

1.1 – Dérivation

Définition 1

On dit que $f : I \to E$ est **dérivable au point** $a \in I$ si l'application :

$$I \setminus \{a\} \to E,\ x \mapsto \frac{1}{x-a}\left[f(x) - f(a)\right]$$

admet une limite en a suivant $I \setminus \{a\}$.

En cas d'existence, cette limite s'appelle la **dérivée de** f **en** a, on la note $f'(a)$.

Définition 2

On dit que $f : I \to E$ est **dérivable à droite** (resp. **dérivable à gauche**) au point $a \in I$ si l'intervalle $I'_a = I \cap [a, +\infty[$ (resp. $I''_a = I \cap]-\infty, a]$) n'est pas réduit à $\{a\}$ et si la restriction de f à I'_a (resp. I''_a) est dérivable en a.

Si elle existe, une telle dérivée s'appelle **dérivée à droite** (resp. **dérivée à gauche**) **de** f **en** a, et on la note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Chacune des notions concernées par les définitions 1, 2 et 3 est indépendante de la norme choisie dans E.
En effet, cet espace étant de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes ce qui fait que l'existence et la valeur d'une limite ne dépendent pas de la norme choisie.

Définition 3

On dit que $f : I \to E$ est **dérivable (resp. dérivable à droite) (resp. dérivable à gauche)** sur I si f est dérivable (resp. dérivable à droite) (resp. dérivable à gauche) en tout point de I.

On définit alors l'**application dérivée de** f, notée f', par :

$$f' : I \to E,\ x \mapsto f'(x).$$

On définit de façon analogue les applications f'_d : dérivée à droite, f'_g : dérivée à gauche.

Propriété 1

Caractère local de la dérivabilité ✎(1)

- Si a n'est pas une borne de I, pour tout $(c, d) \in I^2$ tel que $c < a < d$, on a :
$$f \text{ est dérivable en } a \iff f|_{[c,d]} \text{ est dérivable en } a.$$
- Si $a = \inf I$, pour tout $c \in I \setminus \{a\}$, on a :
$$f \text{ est dérivable en } a \iff f|_{[a,c]} \text{ est dérivable en } a.$$
- Si $a = \sup I$, pour tout $c \in I \setminus \{a\}$, on a :
$$f \text{ est dérivable en } a \iff f|_{[a,c]} \text{ est dérivable en } a.$$

✎(1) Il suffit de remarquer que l'on a les mêmes équivalences pour l'existence de la limite en a d'une fonction et de la restriction correspondante.

Propriété 2

Si $a \in I$ n'est pas une borne de I, $f : I \to E$ est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$ et dans ce cas on a :

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a).$$

☞ En effet, on sait que $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite ℓ en a si et seulement si elle admet une limite à gauche ℓ_g et une limite à droite ℓ_d en ce point avec $\ell_g = \ell_d$ ✎[2]

et dans ce cas : $\quad \ell = \ell_g = \ell_d$.

✎[2] La propriété est connue pour les fonctions numériques. En examinant les composantes, on voit qu'elle reste vraie pour les fonctions vectorielles.

Propriété 3

La dérivabilité de $f : I \to E$ en $a \in I$ se traduit aussi par :

il existe $\ell \in E$ tel que $f(a+h) = f(a) + h\,\ell + o(h)$ quand h tend vers 0. ✎[3]

✎[3] Il suffit de remarquer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$ se traduit par : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell + o(1)$.

Propriété 4

La dérivabilité en un point (resp. sur I) entraîne la continuité en ce point (resp. sur I). ✎[4]

✎[4] Corollaire immédiat de la propriété 3.

Propriété 5

L'ensemble $\mathcal{D}(I, E)$ des applications dérivables de I dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, E)$. L'application «dérivation» : $\mathcal{D}(I, E) \to \mathcal{F}(I, E)$, $f \mapsto f'$ est linéaire. ✎[5]

✎[5] Démonstration identique à celle donnée en Analyse PCSI ou MPSI pour les fonctions numériques.

Propriété 6

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $f : I \to E$ et $g = u \circ f : I \to E$.

Si f est dérivable en $a \in I$ alors g est dérivable en a et : $\quad g'(a) = u\big(f'(a)\big)$.

Si f est dérivable sur I, alors g est dérivable sur I et $\quad g' = u \circ f'$.

☞ u étant continue, si $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, on a ✎[6] $\lim\limits_{h\to 0} u\big(\varepsilon(h)\big) = 0$ donc $u\big(o(h)\big) = o(h)$.

Alors $\quad g(a+h) - g(a) = u\big(hf'(a) + o(h)\big) = hu\big(f'(a)\big) + o(h)$.

✎[6] Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue (cf. chap. 1).

Propriété 7

Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, $f : I \to E$, $\; g : I \to F$

et $\quad B(f, g)$ l'application de I dans G définie par $\quad B(f, g) : x \mapsto B\big(f(x), g(x)\big)$.

Si f et g sont dérivables en $a \in I$, alors $B(f, g)$ est dérivable en a avec :

$$B(f, g)'(a) = B\big(f'(a), g(a)\big) + B\big(f(a), g'(a)\big).$$

Si f et g sont dérivables sur I, alors $B(f, g)$ est dérivable sur I, avec :

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

☞ $B(f, g)(a+h) = B\Big(f(a) + hf'(a) + o(h), g(a) + hg'(a) + o(h)\Big)$

en développant par bilinéarité, compte tenu de la continuité de B, il vient :

$$B(f, g)(a+h) - B(f, g)(a) = h\,B\big(f'(a), g(a)\big) + h\,B\big(f(a), g'(a)\big) + o(h)$$

Exemples

- Le produit usuel : $\; E = F = G = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\; B : (x, y) \mapsto xy$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

- Le produit scalaire : $E = F$ espace euclidien (resp. hermitien), $G = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), $B : (x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$.

$$\langle f \mid g \rangle' = \langle f' \mid g \rangle + \langle f \mid g' \rangle$$

$$\left(\|f\|^2\right)' = 2\langle f' \mid f \rangle \quad \text{(resp. } \langle f' \mid f \rangle + \langle f \mid f' \rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\langle f' \mid f \rangle\text{)}.$$

On en déduit que si $f \in \mathcal{D}(I, E)$ est unitaire c'est-à-dire si $\forall x \in I, \|f(x)\| = 1$ alors :

$\forall x \in I$, $f'(x)$ est orthogonal à $f(x)$.

[7] C'est une conséquence de la propriété analogue sur les limites de fonctions vectorielles.
Dans le cas particulier où $E=\mathbb{C}$, avec $u=\mathrm{Re}\, f$, $v=\mathrm{Im}\, f$, f est dérivable en a (resp. sur I) si et seulement si u et v le sont, et alors $f'(a)=u'(a)+iv'(a)$ (resp. $f'=u'+iv'$).

Propriété 8

Soit $p = \dim E$ et $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une base de E.

Si $f \in \mathcal{F}(I, E)$ est donnée par $x \mapsto f(x) = \sum_{j=1}^{p} f_j(x)e_j$, alors f est dérivable en a (resp. sur I) si et seulement si toutes les applications coordonnées $f_1, \dots, f_p$ le sont et dans ce cas :

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{p} f_j'(a)e_j. \text{ [7]}$$

Propriété 9

Soit $f : I \to E$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

Alors f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ (sur $\mathring{I}$).

☞ Le résultat analogue est connu pour les fonctions réelles. On l'applique donc à $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ pour l'étendre aux fonctions complexes puis aux composantes pour l'étendre aux fonctions vectorielles.

Propriété 10

Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $\varphi(I) \subset J$ et $f \in \mathcal{D}(J, E)$.
Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I avec :

$$(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)\varphi'$$

☞ Le résultat est connu dans le cas $E = \mathbb{R}$. En examinant les fonctions composantes, on l'étend successivement au cas $E = \mathbb{C}$ puis à E quelconque.

2. Fonctions de classe C^p

Définition 4

Comme dans le cas des fonctions réelles, pour $f : I \to E$, on définit par récurrence les dérivées successives à partir de : $f^{(0)} = f$ dérivée d'ordre 0. Elles sont notées $f^{(p)}$ ou $\mathcal{D}^p f$.
On note $\mathcal{D}^n(I, E)$ l'ensemble des applications de I dans E n fois dérivables.

Définition 5

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to E$, on dit que f est de classe C^p si $f \in \mathcal{D}^p(I, E)$ et si $f^{(p)} : I \to E$ est continue.
On note $C^p(I, E)$ l'ensemble des applications de classe C^p de I dans E. [8]
On dit que $f : I \to E$ est de classe C^∞ si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est de classe C^p.

[8] D'après la relation de définition $f^{(0)}=f$, la continuité de f correspond à la classe C^0. De ce fait, $C(I,E)$ est aussi noté $C^0(I,E)$.

Définition 6

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
On dit que f est un C^p-**difféomorphisme** de I sur J lorsque :
(1) f est un homéomorphisme de I sur J,
(2) f est de classe C^p sur I,
(3) f^{-1} est de classe C^p sur J.

La notion d'homéomorphisme a été introduite en Analyse, PCSI ou MPSI, chapitre 5, et revue dans le chapitre 1 de ce tome.

Propriété 11

Soit $n = \dim E$, $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de E et $f \in \mathcal{F}(I, E)$ définie par ses composantes $f_1, \ldots, f_n$ sur cette base. Alors, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I si et seulement si chaque f_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, est de classe $\mathcal{C}^p$ et dans ces conditions :

$$\forall x \in I, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(p)}(x) e_i$$

Propriété 12

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}^p(I, E)$ et $\mathcal{C}^p(I, E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}(I, E)$.

Dans le cas où $E = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Propriété 13

Formule de Leibniz [9]

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si on a $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}^p(I, E)$, alors $fg \in \mathcal{C}^p(I, E)$ et, pour $0 \leqslant n \leqslant p$:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

[9] Produit d'une fonction scalaire et d'une fonction vectorielle. La démonstration est analogue à celle vue en PCSI ou MPSI pour les produits de fonctions réelles.

Propriété 14

Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ [10]

Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$.

Étant donné $\varphi \in \mathcal{C}^p(I, J)$ et $f \in \mathcal{C}^p(J, E)$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

[10] Composée d'une fonction rélle et d'une fonction vectorielle.

La propriété est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$ d'après la propriété **10**, on achève par récurrence en constatant que :

$$(f \circ \varphi)^{(p)} = \left[(f \circ \varphi)'\right]^{(p-1)} \quad \text{et} \quad (f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)\varphi'. \quad [11]$$

[11] On pourrait aussi utiliser que la propriété est connue pour les fonctions composantes.

Propriété 15

Caractérisation des $\mathcal{C}^p$-difféomorphismes, $p \in \mathbb{N}^*$ [12]

Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, une application f de I dans J est un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de I sur J si et seulement si :

(1) f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,

(2) $f(I) = J$,

(3) $\forall x \in I, \quad f'(x) \neq 0$.

[12] Fonctions réelles de variable réelle.

- La dérivablilité des fonctions réciproques a été étudiée en Analyse, PCSI ou MPSI, chapitre **5**, et d'après cette étude si f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ on a $0 \notin f'(I)$:

  les conditions **(1)**, **(2)**, **(3)** sont nécessaires.

- Réciproquement, si f vérifie **(1)**, **(2)**, **(3)** :

f' est continue et ne s'annule pas sur I, elle est donc de signe constant, f est strictement monotone, c'est un homéomorphisme de I sur $J = f(I)$. Il reste à montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^p$ ce que l'on obtient par récurrence en notant :

1) que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J avec $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

2) que $\left(f^{-1}\right)' = i \circ f' \circ f^{-1}$, où i est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $f'(I) \subset \mathbb{R}^*$,

donc en supposant la propriété vraie pour $p-1$, $\left(f^{-1}\right)'$ apparaît comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^{p-1}$.

Ainsi f^{-1} est ce classe $\mathcal{C}^p$, ce qui achève la démonstration par récurrence.

3. Fonctions de classe C^p par morceaux

(13) Pour $p=0$, on retrouve la notion de fonction **continue par morceaux**.

Définition 7

Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. (13)

a) Une application $f : [a, b] \to E$, (a et b réels, $a < b$) est dite de **classe C^p par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que la restriction $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$, soit prolongeable en une fonction de classe C^p sur $[a_i, a_{i+1}]$.

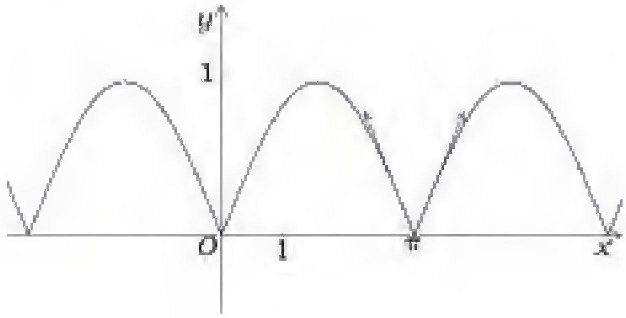
Une telle subdivision est dite **adaptée** à f.

b) Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Une application $f : I \to E$ est dite de **classe C^p par morceaux** sur I si sa restriction à tout segment $[a, b] \subset I$ est de classe C^p par morceaux sur $[a, b]$.

Exemples

- La fonction partie entière est de classe C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto |\sin x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$.



Définition 8

Si $f : [a, b] \to E$ est de classe C^p par morceaux sur $[a, b]$, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ de f sont définies sur $[a, b]$ privé d'une partie finie, on les note encore $f^{(k)}$ ou $D^k f$.

Propriété 16

Soit $p \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

L'ensemble noté $\mathcal{M}^p(I, E)$ (14) des applications de I dans E de classe C^p par morceaux sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$.

(14) Dans le cas $p=0$, on note aussi $\mathcal{M}(I,E)$ l'espace vectoriel des applications continues par morceaux de I dans E.

Propriété 17

Si $f : I \to E$ est continue sur I et de classe C^1 par morceaux sur I, alors f est constante sur I si et seulement si $Df = 0$.

Si $Df = 0$, considérons $(x, y) \in I^2$, $x < y$.

Il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[x, y]$ telle que f soit de classe C^1 sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$ et continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Alors d'après la propriété **9**, f est constante sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$ et finalement $f(x) = f(y)$.

B. Intégration sur un segment

Dans cette section, on se propose également d'étendre aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé E des notions introduites en PCSI ou MPSI et relatives aux fonctions numériques.

E, F,... sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés dimension finie :

1. Intégrale d'une fonction en escalier

L'intégrale d'une fonction en escalier vectorielle se définit comme dans le cas des fonctions numériques, les propriétés sont les mêmes.

Définition 9

Soit $I = [a, b]$, $a < b$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{E}([a, b], E)$. (15)

Si $\sigma = (c_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f, on pose :

$$I(f, \sigma) = \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_{j-1}) \lambda_j$$

où λ_j est la valeur constante prise par f sur $]c_{j-1}, c_j[$.

Ce vecteur est indépendant du choix de la subdivision adaptée à f, on l'appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ et on le note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_I f$.

(15) $\mathscr{E}([a,b], E)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans E. (Cf. chapitre 3, définition 13.)

***a* et *b* sont des réels tels que *a* < *b*.**

Propriété 18

Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de E.

Une application $f : [a, b] \to E$ est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si chacune de ses composantes f_i sur la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est en escalier sur $[a, b]$.

On a alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \sum_{i=1}^{p} f_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_{[a,b]} f_i \right) e_i$.

Propriété 19

L'application $f \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ qui, à une fonction $f \in \mathscr{E}([a, b], E)$, associe son intégrale, est linéaire.

Propriété 20

Si f est en escalier $[a, b]$: $f \in \mathscr{E}([a, b], E)$, pour tout $c \in]a, b[$ les restrictions $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

En notant $\displaystyle\int_{[a,c]} f$ au lieu de $\displaystyle\int_{[a,c]} f_{|[a,c]}$ et $\displaystyle\int_{[c,b]} f$ au lieu de $\displaystyle\int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$, on a :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Propriété 21

Soit $f \in \mathscr{E}([a, b], E)$ et $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur E. Alors :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \| f \|. \text{ (16)}$$

(16) Précisons que la fonction $\| f \|$ est définie sur $[a,b]$ par $\| f \| : x \mapsto \| f(x) \|$. Sur $]c_{j-1}, c_j[$, $\| f \|$ prend la valeur $\| \lambda_j \|$.

Par l'inégalité triangulaire, on a $\displaystyle\left\| \int_{[a,b]} f \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_{j-1}) \lambda_j \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_{j-1}) \| \lambda_j \|$

et cette seconde somme n'est autre que $\displaystyle\int_{[a,b]} \| f \|$.

2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

2.1 – Définition

Théorème 1

Soit $I = [a, b]$, $a < b$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{M}([a, b], E)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications en escalier de I dans E convergeant uniformément vers f sur I. (17)

Alors la suite $\left(\int_I \varphi_n\right) \in E^{\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite ne dépend que de f, on la note $\mathcal{I}([a, b], f)$.

(17) On a vu dans le chapitre 3 que toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions en escalier.

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a $\left\|\int_I \varphi_n - \int_I \varphi_p\right\| = \left\|\int_I \varphi_n - \varphi_p\right\| \leqslant \left|\int_I \|\varphi_n - \varphi_p\|_\infty^I\right|$

$$\text{donc} \quad \left\|\int_I \varphi_n - \int_I \varphi_p\right\| \leqslant |b - a|\,\|\varphi_n - \varphi_p\|_\infty^I \text{ (18)}$$

(18) On utilise là les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier.

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{B}_\infty([a, b], E)$, c'est donc une suite de Cauchy et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant p \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \|\varphi_n - \varphi_p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{|b - a|}.$$

Ainsi $n \geqslant p \geqslant N \;\Rightarrow\; \left\|\int_I \varphi_n - \int_I \varphi_p\right\| < \varepsilon$. On a montré que $\left(\int_I \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E, elle est donc convergente puisque E est de dimension finie.

Si $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une seconde suite de $\mathcal{E}([a, b], E)$ convergeant uniformément vers f, la suite $(\varphi_n - \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

Or, $\left\|\int_I \varphi_n - \int_I \psi_n\right\| = \left\|\int_I \varphi_n - \psi_n\right\| \leqslant |b - a|\,\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty^I$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I \psi_n.$$

Propriété 22

a et b étant fixés, l'application $\mathcal{I}$: $\mathcal{M}([a, b], E) \to E$, $f \mapsto \mathcal{I}([a, b], f)$ définie dans le théorème 1, coïncide sur $\mathcal{E}([a, b], E)$ avec l'application intégrale sur $[a, b]$.

On dit aussi que $\mathcal{I}$ prolonge l'application $\mathcal{E}([a, b], E) \to E$, $\varphi \mapsto \int_I \varphi$.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], E)$, φ est limite uniforme sur $[a, b]$ de la suite constante $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n = \varphi$.

Alors $\mathcal{I}([a, b], \varphi) = \lim_{n\to+\infty} \int_I \varphi_n$ donne $\mathcal{I}([a, b], \varphi) = \int_I \varphi$.

Définition 10

Pour tout $f \in \mathcal{M}([a, b], E)$, l'élément $\mathcal{I}([a, b], f)$ de E qui lui est associé est appelé **intégrale** de f sur $[a, b]$ et noté :

$$\int_I f \quad \text{ou} \quad \int_{[a,b]} f \text{ (19)}$$

(19) Pour que cette construction soit cohérente, on s'assure que si f est une fonction numérique, $\mathcal{I}([a,b], f)$ est bien égal à l'intégrale $\int_I f$ telle qu'elle a été définie en PCSI ou MPSI.

[20] Les propriétés spécifiques aux intégrales de fonctions numériques, ont été étudiées en Analyse – PCSI ou MPSI et sont rappelées ici sans aucune démonstration.

2.2 – Propriétés [20]

Étant donnés a et b réels tels que $a < b$, on pose $I = [a, b]$.

Propriété 23

E étant rapporté à une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$ de fonctions composantes f_i, $1 \leqslant i \leqslant p$: $f = \sum_{i=1}^{p} f_i e_i$.

Alors $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i \in \mathcal{M}(I, \mathbb{K})$, $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et :

$$\int_I f = \int_I \sum_{i=1}^{p} f_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_I f_i \right) e_i .$$

Si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{E}(I, E)$ convergeant uniformément vers f, notons pour tout n :

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{p} \varphi_{i,n} e_i .$$

Choisissons dans E la norme définie par : $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, $\|x\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$.

Il vient alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\|\varphi_{i,n} - f_i\|_\infty^I \leqslant \|\varphi_n - f\|_\infty^I$

donc chaque suite $(\varphi_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, converge uniformément vers f_i. [21]

[21] Ce résultat ne dépend pas du choix fait pour la norme sur E puisque toutes les normes sur E sont équivalentes.

Pour les fonctions en escalier, on a :

$$\int_I \varphi_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_I \varphi_{i,n} \right) e_i$$

d'où la conclusion par passage à la limite.

Conséquence

Les propriétés **24**, **26** et **27** qui suivent peuvent de prouver de deux façons :

1) on utilise le fait que les fonctions en escalier vérifient cette propriété et on conclut par passage à la limite ; [22]

2) on utilise la propriété **23** et le fait que les fonctions composantes vérifient la même propriété.

[22] C'est cette méthode que nous allons retenir.

Propriété 24

Linéarité de l'intégrale

L'application $\mathcal{M}(I, E) \to E$, $f \mapsto \int_I f$ est linéaire.

Soit $(f, g) \in \mathcal{M}(I, E)^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Si $(\varphi_n)_\mathbb{N}$ et $(\psi_n)_\mathbb{N}$ sont deux suites de fonctions en escalier convergeant uniformément sur I vers f et g respectivement, $(\lambda \varphi_n + \mu \psi_n)_\mathbb{N}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

La relation $\int_I \lambda \varphi_n + \mu \psi_n = \lambda \int_I \varphi_n + \mu \int_I \psi_n$ donne alors $\int_I \lambda f + \mu g = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$ par passage à la limite.

Corollaire 1

Soit f et g deux applications de I dans E continues par morceaux sur I et coïncidant, sauf sur une partie finie de I.

On a alors $\int_I f = \int_I g$.

En effet, $\int_I f - \int_I g = \int_I (f - g)$, et $f - g$ est en escalier, nulle sur les intervalles ouverts d'une subdivision adaptée donc $\int_I (f - g) = 0$.

Corollaire 2

Soit f une fonction de I dans E définie sur I sauf peut-être aux points d'une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de I et telle que la restriction de f à chaque sous-intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, soit prolongeable en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Alors toutes les fonctions continues par morceaux sur I et coïncidant avec f sur $I \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ ont la même intégrale sur I.

On pose par définition $\int_I f = \int_I g$ où g est l'une quelconque de ces fonctions.

Propriété 25

Positivité – Croissance [23]

[23] Voir Analyse – PCSI ou MPSI.

- Si $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{R})$ est positive sur I alors : $\int_I f \geqslant 0$.
- L'application $\int_I : \mathcal{M}(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_I f$ est croissante, c'est-à-dire que pour tout $(f, g) \in \mathcal{M}(I, \mathbb{R})^2$, on a :

$$f \leqslant g \ \Rightarrow\ \int_I f \leqslant \int_I g.$$

Propriété 26

Intégrale sur un sous-intervalle

Soit $K = [c, d]$, $(c < d)$, un segment inclus dans $I = [a, b]$ et $f \in \mathcal{M}(I, E)$. Alors la restriction $f_{|K}$ est continue par morceaux sur K,

l'intégrale $\int_K f_{|K}$ est encore notée $\int_K f$.

En appelant χ_K la fonction caractéristique de K, [24] on a :

$$\int_K f = \int_I \chi_K f$$

[24] Rappelons que χ_K est définie par : $\chi_K(x)=1$ si $x \in K$ et, $\chi_K(x)=0$ si $x \notin K$.

☞ Si $(\varphi_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier uniformément convergente vers f sur I, la suite $(\psi_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \psi_n = \varphi_n|_K$ converge uniformément vers $f|_K$ sur K [25]

[25] car il est clair que $\| \psi_n - f|_K \|_\infty^K \leqslant \| \varphi_n - f \|_\infty^I$.

donc $\int_K f = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_K \psi_n$.

En remarquant que pour les fonctions en escalier on a $\int_K \psi_n = \int_I \chi_K \varphi_n$ et que la suite $(\chi_K \varphi_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\chi_K f$ sur I, un passage à la limite donne :

$$\int_K f = \lim_{n \to +\infty} \int_I \chi_K \varphi_n = \int_I \chi_K f.$$

Propriété 27

Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration

Soit c réel tel que $a < c < b$ et $f \in \mathcal{M}([a, b], E)$.

Alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

☞ Soit $g = \chi_{[a,c]} f + \chi_{[c,b]} f$. Les fonctions f et g coïncident sur $[a, b] \setminus \{c\}$ [26]

[26] $g(c)=2f(c)$.

donc, d'après le corollaire 1 de la propriété **24**, on a $\int_I f = \int_I g$ d'où par linéarité de l'intégrale :

$\int_I f = \int_I \chi_{[a,c]} f + \int_I \chi_{[c,b]} f$, puis avec la propriété 26 $\int_I f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

(27) Il s'agit là d'un résultat établi en Analyse – PCSI ou MPSI que nous rappelons ici vu son importance dans les notions de norme en moyenne et en moyenne quadratique.

Propriété 28

Intégrale d'une fonction continue positive (27)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et positive sur $I = [a, b]$.

- Si $f \neq 0$ alors $\int_I f > 0$.
- Si $\int_I f = 0$ alors $f = 0$.

Propriété 29

Image par une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $u \circ f \in \mathcal{M}(I, F)$ et :

$$\int_I u \circ f = u\left(\int_I f\right).$$

(28) $(c_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ étant une subdivision adaptée à f.

(29) On peut prendre $\lambda = |||u|||$ où $|||\cdot|||$ est la norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ subordonnée aux normes choisies dans E et F. (cf. chap. 1).

La propriété est vraie lorsque f est en escalier.

En effet, on a alors $\int_I f = \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_{j-1})\, \lambda_j$ (28) et par linéarité de u :

$$\int_I u \circ f = \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_{j-1})\, u(\lambda_j) = u\left(\sum_{j=1}^{n} (c_j - c_{j-1})\, \lambda_j\right) = u\left(\int_I f\right).$$

Pour $f \in \mathcal{M}(I, E)$, f est limite uniforme d'une suite $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}(I, E)$.

L'espace E étant de dimension finie, l'application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue et on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall y \in E,\ \| u(y) \| \leqslant \lambda \| y \|$ (29)

Alors l'inégalité : $\forall x \in I,\ \| u \circ f(x) - u \circ \varphi_k(x) \| \leqslant \lambda \| f(x) - \varphi_k(x) \| \leqslant \lambda \| f - \varphi_k \|_\infty^I$, montre que $u \circ f$ est limite uniforme sur I de $(u \circ \varphi_k)_{\mathbb{N}}$.

On en déduit :

$$\int_I u \circ f = \lim_{k \to +\infty} \left(\int_I u \circ \varphi_k\right) = \lim_{k \to +\infty} u\left(\int_I \varphi_k\right)$$

et avec de nouveau la continuité de u :

$$\lim_{k \to +\infty} u\left(\int_I \varphi_k\right) = u\left(\lim_{k \to +\infty} \int_I \varphi_k\right) = u\left(\int_I f\right).$$

Exemples

Soit E un espace euclidien, v un vecteur fixé de E et $f \in \mathcal{M}(I, E)$.

La propriété **29** donne : $\int_I \langle v \,|\, f(x) \rangle \mathrm{d}x = \left\langle v \,\middle|\, \int_I f(x)\mathrm{d}x \right\rangle$.

Si E est orienté de dimension 3, on a de même $\int_I v \wedge f(x)\mathrm{d}x = v \wedge \int_I f(x)\mathrm{d}x$.

Propriété 30

Inégalité de la moyenne

Soit $\mathcal{M}(I, E)$. La norme sur E étant notée $\| \cdot \|$, on définit la fonction $\| f \| \in \mathcal{M}(I, \mathbb{R})$ par $\| f \| : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \| f(x) \|$.

Alors $\left\| \int_I f \right\| \leqslant \int_I \| f \|$.

(30) C'est la propriété 21.

La propriété est vraie pour une fonction en escalier. (30)

Dans le cas général, f est limite uniforme d'une suite $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur I, et l'inégalité :

$$\forall x \in I,\quad \Big|\, \| f(x) \| - \| \varphi_k(x) \| \,\Big| \leqslant \| f(x) - \varphi_k(x) \| \leqslant \| f - \varphi_k \|_\infty^I$$

montre que $\| f \|$ est limite uniforme de $(\| \varphi_k \|)_{\mathbb{N}}$ sur I.

La propriété annoncée résulte alors de $\forall k \in \mathbb{N}, \left\| \int_I \varphi_k \right\| \leqslant \int_I \| \varphi_k \|$

$$\lim_{k \to +\infty} \int_I \varphi_k = \int_I f \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} \int_I \| \varphi_k \| = \int_I \| f \|.$$

Remarque

Dans le cas où $E = \mathbb{C}$, en introduisant les parties réelles et imaginaires u et v de $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{C})$, on obtient $\left(\int_I u\right)^2 + \left(\int_I v\right)^2 \leqslant \left(\int_I \sqrt{u^2 + v^2}\right)^2$.

Corollaire 1

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$.

Alors f est bornée sur I et $\left\| \int_I f \right\| \leqslant |b - a| \, \| f \|_\infty^I$.

2.3 – Extension de la définition

I est maintenant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 11

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$, étant donné a et b dans I, on pose : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t =$

- $\int_{[a,b]} f$ si $a < b$
- 0 si $a = b$
- $-\int_{[b,a]} f$ si $b < a$.

Propriété 31

Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$ et a, b, c des éléments de I. On a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 32

Inégalité de la moyenne

Étant donné $f \in \mathcal{M}(I, E)$ et a, b dans I,

$$\left\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\| \leqslant \left| \int_a^b \| f(t) \| \mathrm{d}t \right| \leqslant |b - a| \sup_{t \in [a,b]} \| f(t) \|.$$

Propriété 33

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Quels que soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathcal{M}([a, b], \mathbb{K})^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a :

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leqslant \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2.$$

(31) Le cas $a = b$ est évident et sans intérêt.

La formule est invariante par échange de a et b, on peut donc supposer $a < b$. (31)

- Premier cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2$.

Si $\int_a^b f^2 \neq 0$, l'application $\lambda \mapsto \int_a^b (\lambda f + g)^2$ est un polynôme réel de degré 2 et de signe constant. Son discriminant est donc négatif ou nul ce qui donne l'inégalité annoncée.

Si $\int_a^b f^2 = 0$, la même application est affine de signe constant donc $\int_a^b fg = 0$ et l'inégalité est encore vraie.

- Deuxième cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

L'inégalité est vraie pour les fonctions $|f|$ et $|g|$ d'où :

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leqslant \left(\int_a^b |fg| \right)^2 \leqslant \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2$$

C. Dérivation et intégration

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point. Les fonctions étudiées dans cette section sont définies sur I et à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie.

1. Primitives

Définition 12

Soit f une application de I dans E : $f \in \mathcal{F}(I, E)$.

Une primitive de f sur I est une application $g \in \mathcal{D}^1(I, E)$ telle que $g' = f$.

Conséquence

Pour $f \in C(I, E)$, si g est une primitive de f, alors $g \in C^1(I, E)$.

Théorème 2

Deux primitives g_1 et g_2 d'une même application $f \in \mathcal{F}(I, E)$ diffèrent d'une constante.

[32] Propriété 9.

☞ $g_2 - g_1$ est dérivable sur I, avec $(g_2 - g_1)' = 0$, donc [32] $g_2 - g_1$ est constante.

Conséquence

[33] La constante V est vectorielle.

Si $f \in \mathcal{F}(I, E)$ admet une primitive g sur I, elle en admet une infinité. L'ensemble de ces primitives est décrit par les fonctions $g + V : I \to E,\ x \mapsto g(x) + V$, avec $V \in E$. [33]

Théorème 3

Étant donné $f \in C(I, E)$ et a un point fixé quelconque dans I :

a) la fonction $F : I \to E,\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est de classe C^1 sur I : $F \in C^1(I, E)$,

b) F est une primitive de f sur I,

c) c'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

☞ Le résultat est connu dans le cas où $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$ (cf. Analyse – PCSI ou MPSI).
Dans le cas général, il suffit de constater que, si $f_1, \ldots, f_p$ sont les composantes de f sur une base $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ de E, celles de F sont $F_1, \ldots, F_n$ avec $F_i : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_i$
puis que chaque F_i est de classe C^1 avec $F_i' = f_i$.

Corollaire

Si $f : I \to E$ est de classe C^p sur I, $p \in \mathbb{N}$, et a étant un point fixé dans I, la fonction $F : I \to E,\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est de classe C^{p+1} sur I.

Théorème 4

Extension aux fonctions continues par morceaux

Étant donné $f \in \mathcal{M}(I, E)$ et a un point fixé quelconque dans I :

a) la fonction $F : I \to E,\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est continue sur I,

b) F est dérivable en tout $x \in I$ où f est continue, avec $F'(x) = f(x)$,

c) F est de classe C^1 par morceaux sur I.

[34] $M = \sup\limits_{t \in [x,y]} \|f(t)\|$, donne : $\forall (t, t') \in [x,y]^2$, $\|F(t') - F(t)\| \leq |t - t'| M$.

☞ a) Sur tout segment $[x, y] \subset I$, f est continue par morceaux donc bornée. On en déduit que F est localement lipschtzienne donc continue sur I. [34]

b) Si f est continue en x, il existe c, d dans I tels que $c < x < d$ si x n'est pas borne de I, ou $c = x < d$ si $x = \inf I$, ou $c < d = x$ si $x = \sup I$, avec f continue sur $[c, d]$.

D'après la relation de Chasles, on a $F(x) = \int_a^c f + \int_c^x f$ et le théorème 3 donne que $G : t \mapsto \int_c^t f$ est de classe C^1 sur $[c, d]$ avec $\forall t \in [c, d]$, $G'(t) = f(t)$. Il en est donc de même pour $F_{|[c,d]}$. D'après le caractère local de la dérivabilité (35) on en déduit que F est dérivable en x avec $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

(35) cf. propriété 1.

c) Si $[\alpha, \beta] \subset I$, $\alpha < \beta$, est un segment tel que f soit continue sur $]\alpha, \beta[$ et prolongeable par continuité sur $[\alpha, \beta]$, la fonction F est continue sur $[\alpha, \beta]$, de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$ et F' admet :

– une limite à droite en α : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} F'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x)$ et

– une limite à gauche en β : $\lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} F'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} f(x)$.

Dans ces conditions, $F_{|[\alpha,\beta]}$ est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$. (36) Ceci montre que F est continue et de classe C^1 par morceaux sur I.

(36) Ce résultat est connu (cf. PSCI ou MPSI, chapitre 6) pour les fonctions numériques et on l'applique aux composantes F_i et f_i de F et f dans une base $(e_i)_{1 \le i \le p}$ de E.

Conséquences

Comme dans le cas des fonctions réelles ou complexes, il en résulte que :

1) si $f \in C(I, E)$ et si P est une primitive de f sur I :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \int_a^b f = P(b) - P(a) \quad \text{ce que l'on note} \quad \int_a^b f = \left[P(x)\right]_a^b.$$

Exemple : Pour tout $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\int_a^b e^{i\omega x}\mathrm{d}x = \frac{i}{\omega}\left(e^{i\omega a} - e^{i\omega b}\right)$.

2) Si $f \in C^1(I, E)$, $\forall (a, b) \in I^2$, $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

3) Comme dans le cas des fonctions réelles, pour $f \in C(I, E)$, $\int f(x)\mathrm{d}x$ représente une primitive non précisée de f sur I.

Théorème 5

Intégration par parties

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to E$ des fonctions de classe C^1 sur I.

Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Il suffit de noter que fg est une primitive de $fg' + f'g$.

Corollaire

En conservant les hypothèses du théorème 5 avec la notation des intégrales indéfinie :

$$\int fg' = fg - \int f'g. \text{ (37)}$$

(37) Il faut comprendre cette égalité «à une constante près».

Théorème 6

Changement de variables

Soit $f \in C(I, E)$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$.

Alors $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)\mathrm{d}u$. (38)

(38) Même démonstration que dans le cas où f est réelle : voir Analyse – PCSI ou MPSI.

Cas particulier

Lorsque φ est strictement monotone, elle est inversible et $\varphi([\alpha, \beta]) = \left[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\right]$.

En posant $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, on a : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)\mathrm{d}u$.

Théorème 7

Changement de variable : extension

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ strictement monotone telle que $\varphi(\alpha) \in I$ et $\varphi(\beta) \in I$.

Alors $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u.$

Soit $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, il existe une famille finie de points de I : $(a_0, \cdots, a_k)$ strictement monotone, avec $a_0 = a$, $a_k = b$, telle que quel que soit $i \in [\![0, k-1]\!]$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ soit prolongeable par une fonction f_i continue sur $[a_i, a_{i+1}]$. On applique le théorème 6 sur chaque intervalle :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a_i)}^{\varphi^{-1}(a_{i+1})} f_i(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$$ (39)

$$= \int_{\varphi^{-1}(a_i)}^{\varphi^{-1}(a_{i+1})} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

et on obtient le résultat avec la relation de Chasles en sommant pour i variant de 0 à $k-1$.

(39) Noter l'importance de l'hypothèse « φ est strictement monotone » : quand u décrit $\left[\varphi^{-1}(a_i), \varphi^{-1}(a_{i+1})\right]$, $\varphi(u)$ décrit $\left[a_i, a_{i+1}\right]$ donc $u \mapsto f_i\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)$ est continue par morceaux sur $[\varphi^{-1}(a_i), \varphi^{-1}(a_{i+1})]$.

2. Étude globale des fonctions de classe C^p, $p \geqslant 1$

2.1 – Inégalité des accroissements finis

Théorème 8

On considère une application continue f de $[a, b]$ dans E, de classe C^1 sur $]a, b[$ telle que f' soit bornée sur $]a, b[$. (40) En posant $M = \sup\limits_{t \in]a,b[} \|f'(t)\|$, on a alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b-a)$$

(40) Dans ce paragraphe, on suppose $a<b$.

Soit $g \in \mathcal{M}([a, b], E)$ telle que $g(a) = g(b) = 0$ et $\forall t \in]a, b[, \quad g(t) = f'(t)$.

La fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ est continue sur $[a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b[$, (41) c'est une primitive de f' sur $]a, b[$. Il existe donc $k \in E$ tel que $\forall x \in]a, b[$, $G(x) = f(x) + k$. La continuité de f et G en a et b donne alors $G(a) = f(a) + k$, donc $f(a) = -k$ et $G(b) = f(b) + k$ donna alors $G(b) = f(b) - f(a)$, c'est-à-dire $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Par définition de g, on a $\sup\limits_{t \in [a,b]} \|g(t)\| = M$ donc : $\quad \|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b-a)$.

(41) Voir le théorème 2.

Théorème 9

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans E, de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$.
Alors f' est bornée sur J et en posant $M = \sup\limits_{t \in J} \|f'(t)\|$, on a :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b-a)$$

Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_k)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. (42)

Pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $f_i = f_{|[a_i, a_{i+1}]}$ est de classe C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$. (43)

Ainsi f' est bornée sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$ donc elle est bornée sur $J = \bigcup\limits_{0 \leqslant i \leqslant k-1}]a_i, a_{i+1}[$.

D'après le théorème 7, on a pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$: $\|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \leqslant M(a_{i+1} - a_i)$

on conclut avec : $\quad \|f(b) - f(a)\| = \left\|\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} f(a_{i+1}) - f(a_i)\right\| \leqslant \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \left\|f(a_{i+1}) - f(a_i)\right\|$.

(42) Cf. définition 7.

(43) Si les restrictions f_i se raccordent continûment, il n'en est pas de même pour les dérivées f_i'.
Pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, f' et f_i' coïncident sur $]a_i, a_{i+1}[$.

(44) C'est la version vectorielle d'un résultat vu en PCSI ou MPSI dans le cadre des fonctions numériques.

(45) Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, $f'(x)$ a $f'(a)$ pour limite en a. Seule la réciproque pose problème.

Théorème 10

Caractérisation des applications de classe C^1 (44)

Soit f une application de $[a, b]$ dans E, continue sur $[a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b]$.

Alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$ si et seulement si f' a une limite (dans E) en a.

(45) Si f' a une limite en a, alors f est de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$ et, comme dans la démonstration du théorème **7**, on a $\forall x \in [a, b],\ f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

Donc en notant g le prolongement continu de f' sur $[a, b]$:

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

ce qui prouve que f est de classe C^1 sur $[a, b]$ avec $f' = g$.

Remarque

Sous les hypothèses du théorème **9**, si f' admet une limite en a, alors $f'(a)$ existe et est égale à cette limite.

Corollaire 1

Extension aux applications de classe C^p

Soit une application f, continue de $[a, b]$ dans E et de classe C^p sur $]a, b]$.

Si, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $D^j f = f^{(j)}$ admet une limite (dans E) en a, alors f est de classe C^p sur $[a, b]$.

Récurrence sur p en utilisant le théorème **9**.

Corollaire 2

Caractérisation des applications de classe C^p par morceaux

Une application f de $[a, b]$ dans E est de classe C^p par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ de $[a, b]$ telle que :

- $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ est de classe C^p sur $]a_i, a_{i+1}[$,
- chaque $f^{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant p$ admet une limite à droite en $a_0 = a$, une limite à droite et une limite à gauche en a_i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, et une limite à gauche en $a_k = b$.

L'existence des limites pour f aux points a_i montre que chaque restriction $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$ est prolongeable par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$: f est donc continue par morceaux sur $[a, b]$.

Soit alors, pour $i \in [\![0, k-1]\!]$, f_i le prolongement continu de $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$, d'après le corollaire précédent, f_i est de classe C^p sur $[a_i, a_{i+1}]$ d'où la conclusion.

2.2 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 11

Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une application de I dans E, de classe C^{n+1} sur I. Pour tout $(a, x) \in I^2$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \quad (46)$$

$R_n(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$ est appelé **reste intégral** d'ordre n.

(46) Même démonstration que pour les fonctions réelles en utilisant l'extension de la formule d'intégration par parties aux produits de fonctions numériques et vectorielles continues de classe C^1 (cf. Analyse – PCSI ou MPSI).

Corollaire

Inégalité de Taylor-Lagrange

Étant donné $f \in C^{n+1}(I, E)$, pour tout $(a, x) \in I^2$, on a :

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|.$$

2.3 – Développements limités

Théorème 12

Développement limité d'une primitive d'une application continue

Si f est une application continue de I dans E, admettant au voisinage de $x_0 \in I$ un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right),$$

toute primitive F de f sur I admet au voisinage de x_0 le développement limité d'ordre $n+1$:

$$F(x) = F(x_0) + a_0(x - x_0) + a_1\frac{(x-x_0)^2}{2} + \ldots + a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right). \text{ (47)}$$

(47) La partie régulière du développement d'ordre $n+1$ de F est égale à $F(x_0)+\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t$ où $P(t)$ est la partie régulière du développement d'ordre n de f.

On a $F(x) = F(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ d'où :

$$F(x) - F(x_0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} = \int_{x_0}^{x} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k(t - x_0)^k \right) \mathrm{d}t$$

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k(t - x_0)^k \right\| < \varepsilon |t - x_0|^n \quad \text{dès que} \quad |t - x_0| < \eta$$

En conséquence, pour $|x - x_0| < \eta$, on a :

$$\left\| F(x) - F(x_0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} \right\| \leqslant \varepsilon \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^n \mathrm{d}t \right|$$

c'est-à-dire $\quad \left\| F(x) - F(x_0) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} \right\| \leqslant \varepsilon \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n+1}$

d'où la conclusion.

Théorème 13

Développement limité de la dérivée d'une application de classe C^1 (48)

Soit f une application de classe C^1 de I dans E telle que f' admette un développement limité d'ordre n au voisinage de $x_0 \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de x_0 et la partie régulière du développement d'ordre n de f' est la dérivée de la partie régulière du développement d'ordre $n+1$ de f.

(48) Ce résultat n'est utilisable que si l'on dispose d'un argument permettant d'affirmer l'existence d'un développement limité pour f', d'où l'intérêt du théorème suivant.

C'est un corollaire du théorème 12 en notant que : $f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t.$

Théorème 14

Formule de Taylor-Young

Soit f une application de classe C^n de I dans E. Pour tout $x_0 \in I$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x - x_0)^n\right).$$

f admet donc un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0.

En écrivant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$, on obtient :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc $\displaystyle f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)\right) \mathrm{d}t$

$f^{(n)}$ est continue en x_0, donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\left\| f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0) \right\| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad |t - x_0| < \eta.$$

Il en résulte $\displaystyle \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right\| \leq \varepsilon \frac{|x-x_0|^n}{n!}$ dès que $|x - x_0| < \eta$,

d'où la conclusion.

Exemple 1 Soit $a \in \mathbb{C}^*$, écrire le développement limité d'ordre $n-1$ au voisinage de 0 de :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \frac{1}{(x-a)^2}.$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elle admet donc un développement limité à tout ordre.

On a $f(x) = F'(x)$ avec $F(x) = \dfrac{1}{a-x}$.

et avec $a^{n+1} - x^{n+1} = (a-x)\left(a^n + a^{n-1}x + \cdots + ax^{n-1} + x^n\right)$ on obtient :

$$\begin{aligned} a^{n+1}F(x) &= \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}x^k + \frac{x^{n+1}}{a-x} \\ \text{donc} \quad F(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{a^{k+1}} + o(x^n). \end{aligned}$$

Par application du théorème **13**, il vient alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)x^k}{a^{k+2}} + o\left(x^{n-1}\right).$$

3. Théorème de relèvement

Théorème 15

Relèvement d'une application de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$ [49]

Étant donné $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{C})$, $(p \geq 1)$, telle que $f(I) \subset \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = e^{i\theta(t)}. \text{ [50]}$$

On dit que θ est un **relèvement** de f.

[49] Ce théorème ne figure pas explicitement au programme de PSI. Il est donné à titre de complément.

[50] Les propriétés essentielles de la fonction exponentielle complexe sont présentées dans le chapitre 5. Rappelons que $\mathbb{U}$ désigne le cercle unité de $\mathbb{C}$: $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$.

Application

Soit Γ un arc paramétré de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^p$, $(p \geq 1)$, défini par :

$$f : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(x(t), y(t)\right).$$

On suppose que Γ ne contient pas le point $O(0,0)$ c'est-à-dire que $\forall t \in I, \; f(t) \neq (0,0)$.

Alors il existe $\rho \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \left(\rho(t)\cos\theta(t), \rho(t)\sin\theta(t)\right).$$

L'essentiel

Méthodes

✔ **Si l'on veut** établir une propiété de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment I

• **on peut** essayer d'utiliser la densité de $\mathcal{E}([a,b],E)$ dans $\mathcal{M}([a,b],E)$

1) Vérifier cette propriété dans le cas des fonctions en escalier.

2) Étendre au cas des fonctions continues par morceaux au moyen d'un passage à la limite en considérant une suite de fonctions en escalier uniformément convergente vers la fonction donnée.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 1

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une fonction est nulle sur un segment I

• **on peut** penser à utiliser que si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et de signe constant sur I, elle est nulle sur I si et seulement si $\int_I f = 0$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

✔ **Si l'on veut** majorer ou minorer une intégrale

• **on peut** penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

✔ **Si l'on veut** résoudre une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue est seulement supposée continue ou continue par morceaux

• **on peut** penser à effectuer une intégration qui permet de mettre en évidence que toute solution éventuelle est dérivable ou mieux, de classe C^n (avec n assez grand), et en déduire une équation différentielle vérifiée par cette fonction.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

Mise en œuvre

Ex. 1

Le lemme de Lebesgue

Soit a et b réels , $a < b$, et $f\ : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0.$

2) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0.$

Indications

Pour traiter le cas des fonctions en escalier il est intéressant de commencer par considérer f constante égale à 1 puis de généraliser avec la linéarité de l'intégrale et la relation de Chasles.

Solution

1) ▪ Envisageons d'abord le cas où f est constante égale à 1 sur $[a, b]$:
$$\forall x \in [a, b], f(x) = 1.$$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{in}\left(e^{inb} - e^{ina}\right)$

donc $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0.$

▪ Si f est en escalier sur $[a, b]$, il existe $\sigma = (c_j)_{0\leqslant j\leqslant p}$ subdivision de $[a, b]$ telle que f soit constante (égale à λ_j) sur chaque intervalle $]c_j, c_{j+1}[, j \in [\![0, p-1]\!]$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \int_{c_j}^{c_{j+1}} e^{inx}\mathrm{d}x.$

Or d'après l'étude précédente, pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$,

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{c_j}^{c_{j+1}} e^{inx}\mathrm{d}x = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0.$

▪ Dans le cas général, soit $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{C})$ d'approximation uniforme de f : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \|f - \varphi_k\|_\infty^{[a,b]} = 0.$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\|f - \varphi_k\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Donc en écrivant
$$\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x) - \varphi_k(x)\right) e^{inx}\mathrm{d}x + \int_a^b \varphi_k(x)e^{inx}\mathrm{d}x$$

il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \varphi_k(x)e^{inx}\mathrm{d}x$

k étant fixé, d'après le 1), on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_k(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0$

donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\left|\int_a^b \varphi_k(x)e^{inx}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Commentaires

Il est important de voir que ce résultat est vrai quel que soit le couple (a, b), ce qui va permettre de le généraliser à une fonction en escalier quelconque avec la relation de Chasles.

Il n'est pas indispensable d'introduire une suite d'approximation uniforme de f par des fonctions en escalier. En effet, en invoquant la densité de $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}([a,b],\mathbb{C})$, on obtient, pour tout $\varepsilon>0$ l'existence de $\varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{C})$ tel que $\|f-\varphi\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Le raisonnement se termine de la même façon.

Finalement $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) e^{inx} \mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon.$

C'est la conclusion.

2) On démontre de même que $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x = 0$ et la conclusion résulte de :

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{et} \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Remarquer que si f est réelle, le 1) suffit pour conclure.

Ex. 2

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, $a < b$, telle que :

$$\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f| \quad \textbf{(1)}$$

Montrer que $f(x)$ a un argument constant sur $[a, b]$.

Indications

Avec $\theta = \arg \int_a^b f$ et $g = f e^{-i\theta}$, **(1)** s'écrit $\int_a^b g = \int_a^b |g|$.

Solution

Posons $\theta = \arg \left(\int_a^b f \right)$ et $g = f e^{-i\theta}$. Alors :

$$\int_a^b g = \left(\int_a^b f \right) e^{-i\theta} = \left| \int_a^b f \right|,$$

et, puisque $|f| = |g|$, la condition **(1)** s'écrit $\int_a^b g = \int_a^b |g|$ **(2)**.

En considérant la partie réelle, on en déduit :

$$\int_a^b \left(|g| - \mathrm{Re}(g) \right) = 0 \quad \textbf{(3)}.$$

Enfin, la fonction $|g| - \mathrm{Re}(g)$ étant positive et continue sur $[a, b]$, la relation **(3)** donne $|g| - \mathrm{Re}(g) = 0$.

Il en résulte $\forall x \in [a, b], \arg g(x) = 0$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in [a, b], \arg f(x) = \theta.$$

Commentaires

Le but est d'écrire l'hypothèse sous une forme équivalente avec une seule intégrale. Il faut donc faire disparaître la valeur absolue dans le premier membre, pour ensuite regrouper les deux intégrales par linéarité.

Ex. 3

Trouver le minimum de $\int_0^1 f''^2$ quand f décrit l'ensemble E des fonctions f de classe C^2 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = a$ où a est un réel donné.

Indications

Écrire la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0, 1]$ à l'ordre 2.

Solution

Pour tout $f \in E$, on a :

$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t) \mathrm{d}t$, donc $a = -\int_0^1 (1-t) f''(t) \mathrm{d}t.$

Commentaires

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$a^2 = \left(\int_0^1 (t-1)f''(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 (t-1)^2\mathrm{d}t \int_0^1 f''(t)^2\mathrm{d}t$$

donc $\displaystyle\int_0^1 f''^2 \geqslant 3a^2.$

On sait que $f \in E$ réalise l'égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [0,1],\ f''(t) = \lambda(t-1).$$

Compte tenu des conditions $f'(0) = a$, $f(0) = f(1) = 0$, on obtient alors

$$f(t) = \frac{a}{2}t(t-1)(t-2)$$

Ainsi la valeur $3a^2$ est atteinte lorsque f décrit E, ce qui prouve que c'est le minimum cherché. D'autre part il s'agit d'un minimum strict car il est atteint en un seul point de E.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut être utilisée pour des majorations, mais aussi pour des minorations.

Sur l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, l'application $(f,g) \mapsto \int_0^1 fg$ est un produit scalaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui s'écrit alors $|(f\,|\,g)| \leqslant \|f\|\|g\|$ devient une égalité si et seulement si le couple (f,g) est lié. [cf. Algèbre-Géométrie chap 5].

Ex. 4

Trouver les fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \quad (E).$

Indications

Écrire l'équation obtenue en intégrant les deux membres de (E) par rapport à y pour en déduire que toute solution éventuelle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Solution

Soit f une solution de E. On a alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_0^y f(x+t)\mathrm{d}t = yf(x) + \int_0^y (f(t)\mathrm{d}t + x\frac{y^2}{2},$$

donc après changement de variable dans la première intégrale :

$$\int_x^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = yf(x) + \int_0^y (f(t)\mathrm{d}t + x\frac{y^2}{2}.$$

En choisissant par exemple $y = 1$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{2} - \int_0^1 f.$$

Cette expression montre que si f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ alors elle est de classe C^{n+1} donc, puisque par hypthèse elle est de classe C^0, une récurrence immédiate donne qu'elle est de classe C^∞.

En dérivant les deux membres de E, par rapport à x puis par rapport à y, il vient $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y) = 1$.

Donc si f est solution du problème, f'' est constante égale à 1, et il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{2} + ax + b$.

Comme de plus l'équation (E) donne $f(0) = 0$, il vient $b = 0$ et les solutions possibles sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + ax$.

Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, avec $f_a \ : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + ax$, on obtient $f_a(x+y) = f_a(x) + f_a(y) + xy$. L'ensemble des solutions du problème est donc constitué de ces fonctions f_a, $a \in \mathbb{R}$, on peut noter qu'il s'agit d'une droite affine.

Commentaires

Face à une telle équation une démarche fructueuse consiste à supposer f dérivable autant qu'il est nécessaire, dériver les deux membres de E par rapport à x et y, et examiner si l'on peut trouver une équation différentielle simple dont f est solution. Si c'est le cas, il faut commencer par prouver que toute solution éventuelle du problème est de classe suffisante.

Il est toujours intéressant de voir si l'on peut trouver des conditions initiales permettant de pousser un peu plus loin l'analyse ce qui simplifie la synthèse.

Remarque : une autre solution consiste à observer que $h : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est solution évidente et donc, que f est solution de (E) si et seulement si $g = f - h$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même, c'est-à-dire si et seulement si g est une application linéaire $x \mapsto ax$.

Exercices

E désigne **un espace vectoriel normé de dimension finie.**

Niveau 1

Ex. 1

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $a<b$.

Montrer que $\left|\int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 2

Soit $f \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ positive ou nulle, telle que $\int_0^1 f > 0$ et A un polynôme réel tel que $\int_0^1 A^2 f = 0$.

Montrer que A est le polynôme nul.

Ex. 3

1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$u_n(x) = \frac{n\,x^{n-1}}{x^n - 1}.$$

2) En déduire $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - e^{it}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{U\}$.

Ex. 4

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$.

On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$0 \leqslant f(x) \leqslant k\int_0^x f.$$

Montrer que f est nulle.

Ex. 5

Soit a un réel tel que $|a| < 1$ et $f : \mathbb{R} \to E$ une application continue par morceaux vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est l'application nulle.

Ex. 6

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, $a < b$.

On pose $M = \|f'\|_\infty^{[a,b]}$.

1) Établir que $\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a)^2\frac{M}{4}$.

2) Étudier les cas d'égalité.

Ex. 7

Trouver les applications $f : \mathbb{R} \to E$ continues par morceaux et telles que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ 2af(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t.$$

Ex. 8

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],E)$, $a < b$. Montrer que :

$$\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right\| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty^{[a,b]}.$$

Ex. 9

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1([a,b],E)$.

1) Montrer que pour tout $t \in [a,b]$, on a :

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^t \frac{x-a}{b-a}f'(x)\mathrm{d}x + \int_t^b \frac{x-b}{b-a}f'(x)\mathrm{d}x$$

2) En déduire :

(1) $\forall t \in [a,b]$, $\|f(t)\| \leqslant$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x + \int_a^b \|f'(x)\|\mathrm{d}x$$

(2) $\left\|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\| \leqslant$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_b^a \|f'(x)\|\mathrm{d}x$$

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 10

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{C}$ continue en 0.

On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(kx)}{x} = \ell, \ \ell \in \mathbb{C}.$$

Montrer que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = \dfrac{\ell}{1-k}$.

Ex. 11

Soit $I = [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C^2(I, E)$.

1) On pose $M_k = \sup_{x \in I} \left\| f^{(k)}(x) \right\|$, $k = 0, 1$ ou 2.

Montrer que pour tout $x \in I$:

$$\|f'(x)\| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{x^2 + a^2}{2a} M_2$$

2) I est maintenant un intervalle quelconque non vide non réduit à un point. Montrer que si f et f'' sont bornées sur I, il en est de même pour f'.

3) M_1, M_2, M_3 étant alors définis comme en 1), montrer que si $I = \mathbb{R}$: pv $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Ex. 12

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} \sin\frac{k}{n^2}$.

Ex. 13

Étudier la suite de terme général

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 nx}.$$

Ex. 14

Soit $f \in C^1\big([0, +\infty[, \mathbb{R}\big)$ telle que $f(0) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq f'(x) \leq 1.$$

1) Montrer que $\displaystyle\left(\int_0^x f\right)^2 \geq \int_0^x f^3$.

2) Dans quels cas y a-t-il égalité ?

Avec éléments de solution

Ex. 15

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in C^2\big([a, b], \mathbb{R}\big)$.

On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b],\ f''(x) \geq k.$$

Montrer que $\forall t \in [0, 1]$,

$$tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)b) \geq \frac{k}{2} t(1-t)(b-a)^2.$$

Ex. 16

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$.

Étudier $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

Ex. 17

On pose $u_{n,p} = \displaystyle\left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p$.

1) Évaluer $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} u_{n,p}\right)$.

2) Évaluer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{p \to +\infty} u_{n,p}\right)$.

Ex. 18

Pour a et b réels tels que $a < b$, on pose $I = [a, b]$, et soit f et g dans $C^0(I, \mathbb{R})$ telles que :

- f est décroissante,
- $g(I) \subset [0, 1]$.

Enfin, on pose $\lambda = \displaystyle\int_a^b g$.

1) Montrer que $\displaystyle\int_a^b fg \leq \int_a^{a+\lambda} f$ (1).

2) Si $g(I) \subset]0, 1[$, montrer que (1) devient une égalité si et seulement si f est constante.

Niveau 3

Avec solution détaillée

Ex. 19

Normes de Hölder sur $C([a,b],\mathbb{K})$

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, $E=C([a,b],\mathbb{K})$,

$p\in]1,+\infty[$ et $q=\dfrac{p}{p-1}$.

On note $N_p : E\to\mathbb{R}^+,\ f\mapsto\left(\displaystyle\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

1) Montrer que $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^2,\ \alpha\beta\leqslant\dfrac{1}{p}\alpha^p+\dfrac{1}{q}\beta^q$.

2) Montrer que pour tout $(f,g)\in E^2$:

$$\left|\int_a^b \bar{f}g\right|\leqslant N_p(f)N_p(g).$$

En déduire que N_p est une norme sur E.

3) Montrer que $\forall f\in E,\ \lim\limits_{p\to+\infty} N_p(f)=\|f\|_\infty^{\mathbb{R}}$.

Avec éléments de solution

Ex. 20

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$ et $f\in\mathcal{M}([a,b],E)$, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t.$$

Ex. 21

Étant donnés f et g dans $C^0([0,1],\mathbb{R}_+^*)$, on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\displaystyle\int_0^1 fg^n$.

Étudier la suite de terme général $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Ex. 22

On recherche les applications $f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f^2(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \qquad (E).$$

1) Donner une solution non triviale.

2) Soit f une solution sur $[0,+\infty[$ pour laquelle il existe $x_0\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_0)>0$. Que peut-on dire de f sur $[x_0,+\infty[$? Décrire f sur $[0,+\infty[$.

3) Décrire toutes les solutions du problème.

Indications

Ex. 10

$$f(x) - f(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} f(k^p x) - f(k^{p+1}x).$$

Ex. 11

1) Appliquer la formule de Taylor sur $[x, a]$ et sur $[x, -a]$.

2) Utiliser le résultat du 1) en distinguant les cas : I borné, I non majoré, I non minoré.

3) Le résultat du 1) est valable sur tout segment $[-a, a]$.

Ex. 12

Introduire $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin \frac{k}{n}$.

Ex. 13

I_n est constant.

Ex. 14

1) Étudier les variations de $x \mapsto \left(\displaystyle\int_0^x f\right)^2 - \displaystyle\int_0^x f^3$.

2) Si f est une solution non nulle, introduire :

$$a = \sup\{x \in \mathbb{R}^+ \,/\, f(x) = 0\}$$

et étudier la dérivabilité de f en a.

Ex. 15

Ramener le problème à l'étude des variations d'une fonction F bien choisie.

Ex. 16

Montrer que pour $|x| < \frac{1}{2}$, on a $x - 2x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Ce n'est pas le meilleur encadrement possible, mais il suffit.

Ex. 17

2) Pour n fixé, développer $\ln u_{n,p}$.

Ex. 18

2) Considérer l'ensemble $E = \{x \in I \,/\, f(x) = f(b)\}$.

Ex. 19

1) Utiliser la concavité de $\ln$.

3) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $\alpha < \beta$ tel que :

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad |f(x)| \geqslant \|f\|_\infty^{[a,b]} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ex. 20

Commencer par étudier le cas où f est constante.
Approcher f par une suite de fonctions en escalier.

Ex. 21

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne le sens de variation de (v_n).

Remarquer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}}$.

Ex. 22

2) Si f ne s'annule pas sur un intervalle I, elle y est dérivable d'après (E).
Considérer l'ensemble
$A = \{x \in [x_0, +\infty[\,/\, \forall t \in [x_0, x],\ f(t) \geqslant f(x_0)\}$
puis $B = \{x \in \mathbb{R}_+^* \,/\, f(x) > 0\}$.

3) Remarquer que f est solution sur $]-\infty, 0]$ si et seulement si $g : x \mapsto -f(-x)$ est solution sur $[0, +\infty[$.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

Posons $\left|\int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)}\mathrm{d}t\right| = r$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)}\mathrm{d}t = re^{i\theta}$ donc $r = \int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)-\theta}\mathrm{d}t$.

Puisque r est réel, il vient : $r = \operatorname{Re}\int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)-\theta}\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\cos\left(\varphi(t)-\theta\right)\mathrm{d}t$,

et enfin, f étant positive, $r \leqslant \int_a^b f(t)\left|\cos\left(\varphi(t)-\theta\right)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 2

Si $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision adaptée, il existe $\alpha \in \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n-1}]a_i, a_{i+1}[$ tel que $f(\alpha) > 0$, sinon on aurait $\int_0^1 f = 0$.

Par continuité de f en α, il existe donc aussi $b \in [0,1]$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) > 0$.

Puisque $A^2 f$ est positive ou nulle sur $[0,1]$, on a $\int_0^1 A^2 f \geqslant \int_a^b A^2 f \geqslant 0$, donc $\int_0^1 A^2 f = 0$ donne $\int_a^b A^2 f = 0$,

et, la fonction $A^2 f$ étant continue positive sur $[a,b]$, il vient $\forall x \in [a,b]$, $A(x)^2 f(x) = 0$ donc $A(x) = 0$.

Le polynôme A est nul car il admet une infinité de racines.

Ex. 3

1) Les pôles de $u_n(x)$ sont les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité : $\omega_k = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

et comme $u_n(x)$ est de la forme $\dfrac{P'}{P}$, la décomposition s'écrit : $u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x-\omega_k}$ **(1)**

2) Pour $z \in \mathbb{C}\setminus U$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \dfrac{1}{z-e^{it}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui assure l'existence de :

$$F(z) = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{z-e^{it}}.$$

Calculons $F(z)$, $z \in \mathbb{C}\setminus U$, par la limite d'une somme de Riemann relative à la subdivision $\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$

Soit $S_n(z) = \dfrac{2\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z-e^{\frac{2ki\pi}{n}}}$. D'après **(1)**, on a $S_n(z) = \dfrac{2\pi z^{n-1}}{z^n-1}$.

D'où $F(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(z) = \begin{cases}\dfrac{2\pi}{z} & \text{si } |z|>1\\ 0 & \text{si } |z|<1\end{cases}$

Ex. 4

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = \int_0^x f$. La fonction F ainsi définie est positive et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

L'hypothèse sur f donne $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant F'(x) \leqslant kF(x)$.

En posant $G(x) = F(x)e^{-kx}$, on voit que G est positive de classe C^1 avec $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $G'(x) = \left(F'(x)-kF(x)\right)e^{-kx} \leqslant 0$.

Donc G est positive décroissante et, puisque $G(0) = 0$, elle est nulle sur $\mathbb{R}^+$ et il en est de même pour F donc aussi pour $f = F'$.

Ex. 5

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, posons $M = \|f\|_\infty^{[-b,b]}$.

En remarquant que pour tout $x \in [-b, b]$, $[0, \alpha x] \subset [-b, b]$, on obtient :

$$\forall x \in [-b, b], \ \|f(x)\| \leqslant \left|\int_0^{\alpha x} \|f(t)\|\mathrm{d}t\right| \leqslant M\,|\alpha x| \leqslant M\,|x|,$$

puis $\|f(x)\| \leqslant \left|\int_0^{\alpha x} M\,|t|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\dfrac{|x|^2}{2}$.

Par récurrence, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-b, b]$, $\|f(x)\| \leqslant M\dfrac{|x|^n}{n!}$. Donc, puisque $\dfrac{|x|^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente, il vient $\forall x \in [-b, b]$, $\|f(x)\| = 0$.

Ceci étant vrai quel que soit $b > 0$, on en conclut finalement que $f = 0$.

Ex. 6

1) Nous avons ici $\forall x \in I$, $f(x) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_b^x f'(t)\mathrm{d}t$ d'où $|f(x)| \leqslant (x-a)M$ et $|f(x)| \leqslant (b-x)M$.

Avec la relation de Chasles, on obtient alors $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$,

d'où $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)M\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)M\mathrm{d}t$,

c'est-à-dire $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2\dfrac{M}{2} + \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2\dfrac{M}{2}$ ou aussi $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)^2\dfrac{M}{4}$cdotp

2) L'égalité nécessite $\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)M\mathrm{d}t$ et $\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(t)\mathrm{d}t| = \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)M\mathrm{d}t$

c'est-à-dire $\int_a^{\frac{a+b}{2}} \Big((t-a)M - |f(t)|\Big)\mathrm{d}t = 0$ et $\int_{\frac{a+b}{2}}^b \Big((b-t)M - |f(t)|\Big)\mathrm{d}t = 0$.

Les fonctions $x \mapsto (x-a)M - |f(x)|$ et $t \mapsto (b-x)M - |f(x)|$ étant continues positives, ces conditions donnent :

$$\forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \ |f(x)| = (x-a)M \ \text{ et } \ \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \ |f(x)| = (b-x)M.$$

Il existe donc $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ tels que :

$$f(x) = \varepsilon_1(x-a)M \text{ sur } \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ et } f(x) = \varepsilon_2(b-x)M \text{ sur } \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Si $M = 0$ il vient $f = 0$ et si $M \neq 0$, la continuité de f en $\dfrac{a+b}{2}$ exige $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($\lambda = \pm M$) tel que $f(x) = \lambda(x-a)$ sur $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, $f(x) = \lambda(b-x)$ sur $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$.

Il est clair que pour $\lambda = 0$ le deuxième cas redonne la fonction nulle. D'autre part on vérifie facilement que quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction f définie comme ci-dessus vérifie :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = |\lambda|\,\frac{b^2-a^2}{4} \quad \text{avec } |\lambda| = \|f'\|_\infty^I.$$

Ces fonctions constituent donc l'ensemble des solutions du cas d'égalité.

Ex. 7

Soit f une solution du problème.

Avec $a = 1$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$, donc f continue par morceaux implique f continue, et f de classe $\mathcal{C}^n$ implique f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. En conséquence, on obtient par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En dérivant par rapport à a les deux membres de l'égalité

$$2af(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t,$$

on obtient successivement $2f(x) = f(x+a) + f(x-a)$ et $0 = f'(x+a) - f'(x-a)$. Donc f' est constante et il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x + \mu$.

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction $x \mapsto \lambda x + \mu$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ est solution du problème.

On a ainsi trouvé l'ensemble de ces solutions.

Ex. 8

Soit $F\ :\ [a,b] \to E,\ x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{x-a}{2}\big(f(x) + f(a)\big)$.

Cette fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ avec :

$$\forall x \in [a,b],\ \ F'(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) - f(a) - (x-a)f'(x)\Big) \quad \text{et} \quad F''(x) = -\frac{1}{2}(x-a)f''(x).$$

Compte tenu de $F(a) = 0$, $F'(a) = 0$, la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$F(b) = \int_a^b (b-x)F''(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\mathrm{d}x \ \text{ donc }\ \| F(b) \| \leqslant \frac{1}{2}\, \|f''\|_\infty^{[a,b]} \int_a^b (b-x)(x-a)\mathrm{d}x.$$

Une intégration par parties fournit $\int_a^b (b-x)(x-a)\mathrm{d}x = \left[-\frac{(b-x)^2}{2}(x-a)\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(b-a)^3$.

D'où finalement $\| F(b) \| \leqslant \frac{1}{12}\, \|f''\|_\infty^{[a,b]}$ ce qui constitue l'inégalité demandée.

Ex. 9

1) En intégrant par parties :

$$\int_a^t \frac{x-a}{b-a} f'(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x-a}{b-a}f(x)\right]_a^t - \frac{1}{b-a}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x = \frac{t-a}{b-a}f(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_t^b \frac{x-b}{b-a} f'(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x-b}{b-a}f(x)\right]_t^b - \frac{1}{b-a}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-t}{b-a}f(t) - \frac{1}{b-a}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

et par addition, on obtient la formule annoncée.

2) Pour $x \in [a,b]$, on a $\left|\frac{x-a}{b-a}\right| \leqslant 1$ et $\left|\frac{x-b}{b-a}\right| \leqslant 1$ et le 1) donne :

$$\|f(t)\| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x + \int_a^t \left|\frac{x-a}{b-a}\right| \|f'(x)\|\mathrm{d}x + \int_t^b \left|\frac{x-b}{b-a}\right| \|f'(x)\|\mathrm{d}x$$

$$\text{d'où} \quad \|f(t)\| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x + \int_a^b \|f'(x)\|\mathrm{d}x \quad (1)$$

Pour $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, on a $\left|\frac{x-a}{b-a}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ et pour $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, on a $\left|\frac{b-x}{b-a}\right| \leqslant \frac{1}{2}$,

d'où maintenant :

$$\left\|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b \|f'(x)\|\mathrm{d}x \quad (2)$$

Niveau 2

Ex. 10

L'hypothèse $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(kx)}{x} = \ell$ donne l'existence de $\varphi\ :]-\alpha,\alpha[\to\mathbb{C}$, continue en 0 avec $\varphi(0)=0$ et telle que :

$$\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\ \ f(x)-f(kx)=\ell x + x\,\varphi(x).$$

On en déduit $\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\ \ \forall p\in\mathbb{N},\ \ f(k^p x)-f(k^{p+1}x)=\ell k^p x + k^p x\,\varphi(k^p x).$ **(1)**

Remarquons alors que, f étant continue en 0, on a $\lim_{p\to+\infty} f(k^{p+1}x)=f(0)$ ce qui assure la convergence de la série de terme général $f(k^p x)-f(k^{p+1}x)$ et en sommant les égalités **(1)**, il vient :

$$f(x)-f(0)=\frac{\ell\,x}{1-k}+x\sum_{p=0}^{+\infty}k^p\,\varphi(k^p x).\qquad \textbf{(2)}$$

Puisque la fonction φ est également continue en 0 avec $\varphi(0)=0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $b\in]0,\alpha[$ tel que :

$$\forall t\in]-b,b[,\ \ |\varphi(t)|\leqslant\varepsilon.$$

Alors pour $|x|<b$, on a $\forall p\in\mathbb{N},\ \ \left|k^p x\right|<b$ donc $\left|\varphi(k^p x)\right|\leqslant\varepsilon$ et $\left|\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}k^p\,\varphi(k^p x)\right|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{1-k}$.

En conséquence, la relation **(2)** s'écrit :

$$f(x)-f(0)=\frac{\ell\,x}{1-k}+o(x),$$

d'où la conclusion.

Ex. 11

1) Soit $x\in[-a,a]$, appliquons la formule de Taylor avec reste intégral d'ordre 2 sur $[x,a]$ et sur $[x,-a]$:

$$f(a)=f(x)+(a-x)f'(x)+\int_x^a(a-t)f''(t)\mathrm{d}t\qquad f(-a)=f(x)-(a+x)f'(x)-\int_x^{-a}(a+t)f''(t)\mathrm{d}t,$$

donc en retranchant membre à membre, $2af'(x)=f(a)-f(-a)-\displaystyle\int_x^a(a-t)f''(t)\mathrm{d}t+\int_{-a}^x(a+t)f''(t)\mathrm{d}t.$

Il reste à majorer : $\quad 2a\|f'(x)\|\leqslant 2M_0+M_2\left(\displaystyle\int_x^a(a-t)\mathrm{d}t+\int_{-a}^x(a+t)\mathrm{d}t\right),$

c'est-à-dire $$\|f'(x)\|\leqslant\frac{M_0}{a}+\frac{a^2+x^2}{2a}M_2.$$

Remarquons qu'il résulte de cette majoration que f' est bornée sur $[-a,a]$ avec $M_1=\|f'\|_\infty^{[-a,a]}\leqslant\dfrac{M_0}{a}+aM_2$.

2) ▪ Premier cas : supposons I borné.

Si I est un segment : $I=[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$, en posant $a=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $J=[-a,a]$,

et $g\ :J\to E,\ \ t\mapsto f(\gamma+t)$ on se retrouve dans les conditions du 1).

On a en effet $g\in C^2(J,E)$, avec $\forall t\in J,\ \ g'(t)=f'(\gamma+t),\ \ g''(t)=f''(\gamma+t)$ donc g et g'' sont bornées sur J avec $\|g\|_\infty^J=M_0$, $\|g''\|_\infty^J=M_2$ et, d'après le 1), il en résulte que g' est bornée sur J avec $\|g'\|_\infty^J\leqslant\dfrac{M_0}{a}+aM_2$,

donc f' est bornée sur I avec $\|f'\|_\infty^I=\|g'\|_\infty^J\leqslant\dfrac{M_0}{a}+aM_2$.

Si I est quelconque, on peut remarquer que f' est bornée sur I si et seulement si elle l'est sur :

$$\overset{\circ}{I}=]\alpha,\beta[,\ \ (\alpha=\inf I,\ \ \beta=\sup I).$$

On pose maintenant $a=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $J=]-a,a[$ et $g\ :J\to E,\ \ t\mapsto f(\gamma+t)$.

Pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, on a $x - \gamma \in J$ et il existe $b \in \left[\frac{a}{2}, a\right[$ tel que $x - \gamma \in [-b, b] \subset J$. On se retrouve pour g dans les conditions du 1) sur $[-b, b]$ et on en déduit $\|f'(x)\| \leqslant \frac{M_0}{b} + bM_2$.

En conséquence, pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, on a $\|f'(x)\| \leqslant \sup\limits_{b \in [\frac{a}{2}, a]} \left(\frac{M_0}{b} + bM_2\right)$ (il s'agit de la borne supérieure d'une fonction continue sur un segment).

- Deuxième cas : I est non borné.

Si I est non majoré, pour tout $x \in I$, on a $[x, x+2] \subset I$ et comme ci-dessus, en considérant la fonction $t \mapsto f(x+1+t)$, on obtient $\|f'(x)\| \leqslant M_0 + M_2$.

Si I n'est pas minoré, pour tout $x \in I$, on a $[x-2, x] \subset I$ et on obtient de même $\|f'(x)\| \leqslant M_0 + M_2$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$, considérons la fonction $g_x : [-a, a] \to E$, $t \mapsto f(x+t)$.

Avec $\|g_x\|_\infty^{[-a,a]} \leqslant M_0$ et $\|g_x''\|_\infty^{[-a,a]} \leqslant M_2$, d'après le 1), on a $\|g_x'(0)\| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{a}{2}M_2$,

c'est-à-dire $\|f'(x)\| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{a}{2}M_2$, et il en résulte $\|f'(x)\| \leqslant \min\limits_{a \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{M_0}{a} + \frac{a}{2}M_2\right)$.

L'étude des variations de $\varphi : a \mapsto \frac{M_0}{a} + \frac{a}{2}M_2$ sur $]0, +\infty[$ montre que φ atteint son minimum en $a = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$

et avec $\varphi\left(\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\right) = \sqrt{2M_0M_2}$, on en déduit $M_1 = \|f'\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Ex. 12

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne pour tout x réel : $|\sin x - x| \leqslant \left|\int_0^x |x - t|\,\mathrm{d}t\right|$ c'est-à-dire $|\sin x - x| \leqslant \frac{x^2}{2}$.

Posons $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} \sin\frac{k}{n^2}$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\frac{k}{n}$.

D'après la remarque initiale, on obtient $|u_n - v_n| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} \sin\frac{k}{n} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n}$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

Pour v_n, on reconnaît une somme de Riemann, et finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \int_0^1 t \sin t\,\mathrm{d}t = \sin 1 - \cos 1.$$

Ex. 13

Le changement de variable défini par $t = nx$ donne $I_n = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \cos^2 t}$ et, la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1 + \cos^2 t}$ étant π-périodique, on a $\int_0^{n\pi} \varphi = n\int_0^{\pi} \varphi$ donc $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \cos^2 t}$.

Ainsi la suite $(I_n)_{\mathbb{N}}$ est constante.

Pour effectuer le calcul de cette constante, remarquons d'abord que la π-périodicité et la parité de φ donnent :

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi,$$

et puisque la fonction $x \mapsto \int_0^x \varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a aussi $I_n = 2 \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \cos^2 t}$.

Pour $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction tangente induit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ sur $[0, \cotan \varepsilon]$. Le changement de variable défini par $u = \tan t$ donne donc

$$I_n = 2 \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{\cotan \varepsilon} \frac{du}{2 + u^2} \quad \text{soit} \quad I_n = \sqrt{2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\text{Arctan} \frac{u}{\sqrt{2}}\right]_0^{\cotan \varepsilon} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Remarque : après avoir étudié l'intégration sur un intervalle quelconque (cf. chap. **6**), on pourra écrire directement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{2 + u^2}.$$

Ex. 14

1) Posons $F(x) = \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$, $x \in [0, +\infty[$.

On a $F(0) = 0$ et F dérivable sur $[0, +\infty[$: $\forall x \in [0, +\infty[$, $F'(x) = f(x)g(x)$ avec $g(x) = 2\int_0^x f - f^2(x)$.

La fonction g ainsi définie est, elle aussi, dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $g'(x) = 2f(x)\big(1 - f'(x)\big)$.

La positivité de f' donne que f est croissante sur $[0, +\infty[$ et, puisque $f(0) = 0$, on a $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$. Alors, en tenant compte de $f'(x) \leqslant 1$, on obtient $\forall x \in [0, +\infty[$, $g'(x) \geqslant 0$, donc g est croissante et, $g(0) = 0$ donne $\forall x \in [0, +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

Finalement F' est positive sur $\mathbb{R}^+$ et, avec $F(0) = 0$, on conclut à $\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) \geqslant 0$, ce qui donne l'inégalité annoncée.

2) Supposons maintenant $\quad \forall x \in [0, +\infty[, \ \left(\int_0^x f\right)^2 = \int_0^x f^3 \qquad (E).$

Deux solutions évidentes sont fournies par la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, et la fonction identité sur $\mathbb{R}^+$: $x \mapsto x$.

Soit f une solution non nulle de (E). Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_0) > 0$ et, f étant croissante, on a

$$\forall x \in [x_0, +\infty[, \ f(x) > 0.$$

Ainsi l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^+ / f(x) = 0\}$ est majoré non vide (car il contient 0), donc il existe :

$$a \in \mathbb{R}^+, \ a = \sup\{x \in \mathbb{R}^+ / f(x) = 0\}.$$

Supposons $a > 0$. Par continuité on a $f(a) = 0$ et, f étant croisssante, $\forall x \in [0, a]$, $f(x) = 0$ donc :

$$f'(a) = f'_g(a) = 0.$$

Par ailleurs F nulle sur $[a, +\infty[$ et $f(x) > 0$ sur $]a, +\infty[$ donne successivement :

$$\forall x \in]a, +\infty[, \ g(x) = 0 \text{ et } f'(x) = 1.$$

Donc, par continuité de f' en a, $f'(a) = 1$ ce qui est contradictoire avec le résultat précédent.

On en conclut que $a = 0$ d'où $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) > 0$, $g(x) = 0$, $f'(x) = 1$ et finalement $f(x) = x$.

L'égalité (E) est donc réalisée uniquement pour la fonction nulle ou la fonction identité.

Ex. 15

Introduisons la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$F(t) = tf(a) + (1 - t)f(b) - f(ta + (1 - t)b) - \frac{k}{2}t(1 - t)(b - a)^2.$$

L'hypothèse $\forall x \in [a, b]$, $f''(x) \geqslant k$ donne que F'' est négative sur $[0, 1]$, donc F' est décroissante.

Toujours avec cette hypothèse et la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient :

$$F'(0) = \int_a^b (t - a)\big(f''(t) - k\big)dt \geqslant 0 \text{ et } F'(1) = -\int_a^b (b - t)\big(f''(t) - k\big)dt \leqslant 0.$$

En conséquence, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $F'(\alpha) = 0$, la fonction F est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, 1]$. La conclusion résulte alors de $F(0) = F(1) = 0$.

Ex. 16

Notons u_n le terme général de la suite proposée, f est bornée donc, pour n assez grand, on a :

$$1+\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)>0$$

et on peut définir la suite de terme général :

$$v_n=\ln u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Avec, par exemple, l'inégalité de Taylor-Lagrange ou la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient une minoration de $\ln(1+x)$ valable pour $|x|<\frac{1}{2}$: $\quad x-2x^2\leqslant\ln(1+x)$, et compte tenu de l'inégalité de convexité $\ln(1+x)\leqslant x$, il vient, pour n assez grand :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-2\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}f^2\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\leqslant v_n\leqslant\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

En majorant $\left|f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right|$ par $\|f\|_\infty^{[a,b]}$, on montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}f^2\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=0$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f$, on trouve finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\exp\left(\int_a^b f\right)$.

Ex. 17

1) Pour $p\in\mathbb{N}^*$ fixé, on a $\alpha_p=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=\int_0^1(1+x)^{\frac{1}{p}}\,dx=\frac{p}{p+1}\left(2^{\frac{p+1}{p}}-1\right)$.

Avec les développements limités $\quad 2^{\frac{p+1}{p}}=2\left(1+\frac{\ln 2}{p}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right),\quad \ln\left(2^{\frac{p+1}{p}}-1\right)=\frac{2\ln 2}{p}+o\left(\frac{1}{p}\right)$,

on obtient $\quad\lim\limits_{p\to+\infty}p\ln\alpha_p=2\ln 2-1$ d'où $\lim\limits_{p\to+\infty}\alpha_p^p=\frac{4}{e}$.

2) Pour $x>0$, la formule de Taylor avec reste intégral donne $e^x=1+x+\int_0^x(x-t)e^t\,dt$

donc $\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2}R(x)$ avec $\quad 0\leqslant R(x)\leqslant e^x$.

On en déduit pour $n\in\mathbb{N}^*$, $k\in[\![0,n-1]\!]$ et $p\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=1+\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{p^2}r(n,k)$

avec $0\leqslant r(n,k)\leqslant 1$, puis $\ln u_{n,p}=p\ln\left[1+\frac{1}{np}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{p^2}R_n\right]$ avec $0\leqslant R_n\leqslant 1$.

Il en résulte, pour n fixé, $\beta_n=\lim\limits_{p\to+\infty}\ln u_{n,p}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

On a ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=2\ln 2-1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=\frac{4}{e}$.

Ex. 18

1) La question se ramène à une étude de variation : on définit $G\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ par $G(x)=\int_a^x g$.

L'hypothèse sur g donne $\forall x\in I,\ \ 0\leqslant G(x)\leqslant x-a$ donc $[a,a+G(x)]\subset I$.

On peut donc ensuite définir $F\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ par $F(x)=\int_a^{a+G(x)}f-\int_a^x fg$.

La décroissance de f et la positivité de g avec de plus $a + G(x) \leqslant x$ donnent alors :

$$\forall x \in I,\ \ F'(x) = \Big[f\big(a + g(x)\big) - f(x)\Big]g(x) \geqslant 0.$$

F étant croissante avec $F(a) = 0$, il vient enfin $F(b) \geqslant 0$ ce qui est exactement l'inégalité **(1)**.

2) Si f est constante, il est clair que **(1)** se réduit à une égalité.

Réciproquement, l'égalité dans **(1)** donne que F' est nulle sur I, et puisque g ne s'annule pas, on a :

$$\forall x \in I,\ \ f\big(a + G(x)\big) - f(x) = 0 \qquad\qquad \textbf{(2)}$$

Avec la décroissance de f, la condition **(2)** donne que pour tout $x \in I$, f est constante sur $[a + G(x), x]$ **(3)**.

On considère alors $E = \{x \in I / f(x) = f(b)\}$.

Cet ensemble est non vide, minoré par a il admet donc une borne inférieure $c \in I$, et puisque f est continue, c appartient à E.

En supposant $c > a$, on obtient $a + G(c) < c$ et d'après **(2)** $f\big(a + G(c)\big) = f(c) = f(b)$. C'est contradictoire avec la définition de c, donc $c = a$ et finalement f est constante sur $[a, b]$.

Niveau 3

Ex. 19

1) La proriété est évidente lorsque α ou β est nul.

Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la fonction ℓn étant concave sur $]0, +\infty[$, en remarquant que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, il vient :

$$\ell n\left(\frac{1}{p}\,\alpha^p + \frac{1}{q}\,\beta^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\,\ell n\,\alpha^p + \frac{1}{q}\,\ell n\,\beta^q = \ell n(\alpha\beta).$$

2) ▪ Ici encore l'inégalité est évidente lorsque f ou g est nulle.

On suppose maintenant $f \neq 0$ et $g \neq 0$ alors les fonctions $|f|^p$ et $|g|^q$ étant continues positives, on a $N_p(f) > 0$ et $N_q(g) > 0$ et le 1) donne pour tout $x \in [a, b]$:

$$\left|\frac{\overline{f(x)}}{N_p(f)} \cdot \frac{g(x)}{N_q(g)}\right| \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{N_p(f)}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{N_q(g)}\right)^q.$$

En intégrant sur $[a, b]$, on en déduit : $\displaystyle \left|\int_a^b \frac{\overline{f}}{N_p(f)} \cdot \frac{g}{N_q(g)}\right| \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b \frac{|f|^p}{N_p(f)^p} + \frac{1}{q}\int_a^b \frac{|g|^p}{N_q(g)^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$

d'où la conclusion : $\displaystyle \left|\int_a^b \overline{f}g\right| \leqslant N_p(f)N_q(g).$

▪ Nous venons de démontrer que $f \neq 0$ donne $N_p(f) > 0$.

D'autre part il est évident que quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $N_p(\lambda f) = |\lambda|\,N_p(f)$.

Il reste donc à vérifier l'inégalité triangulaire pour affirmer que N_p est une norme sur $C([a, b], \mathbb{K})$.

En écrivant :

$$N_p(f + g)^p = \int_a^b |f + g|^p \leqslant \int_a^b |f|\,|f + g|^{p-1} + \int_a^b |g|\,|f + g|^{p-1},$$

l'inégalité du 2) donne :

$$N_p(f + g)^p \leqslant N_p(f)\left(\int_a^b |f + g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + N_p(g)\left(\int_a^b |f + g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

c'est-à-dire $N_p(f + g)^p \leqslant \Big(N_p(f) + N_p(g)\Big)N_p(f + g)^{\frac{p}{q}}$ (car $(p - 1)q = p$).

On en déduit finalement : $\qquad N_p(f) + N_p(g) \geqslant N_p(f + g)^{p - \frac{p}{q}} = N_p(f + g).$

3) Puisque f est continue sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \|f\|_\infty^{[a,b]}$

et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $\alpha < \beta$ tel que : $\quad \forall x \in [\alpha,\beta],\ |f(x)| \geqslant |f(c)|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

On obtient alors $N_p(f) \geqslant \|f\|_\infty^{[a,b]}(\beta-\alpha)^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ et, puisque $\lim\limits_{p\to+\infty}(\beta-\alpha)^{\frac{1}{p}} = 1$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\quad p \geqslant p_0 \Rightarrow N_p(f) \geqslant \|f\|_\infty^{[a,b]}(1-\varepsilon)$.

Comme d'autre part il est clair que $N_p(f) \leqslant \|f\|_\infty^{[a,b]}$, on a finalement

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N}^*,\ p \geqslant p_0 \Rightarrow \|f\|_\infty^{[a,b]}(1-\varepsilon) \leqslant N_p(f) \leqslant \|f\|_\infty^{[a,b]} \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty} N_p(f) = \|f\|_\infty^{[a,b]}.$$

Ex. 20

- On commence par étudier le cas où f est constante réelle égale à 1. Il s'agit alors d'étudier la suite de terme général :

$$u_n = \int_a^b |\sin nt|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb}|\sin x|\,\mathrm{d}x.$$

En posant $p = E\left(\frac{na}{\pi}\right)$ et $q = E\left(\frac{nb}{\pi}\right)$, où E désigne la fonction «partie entière », on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{na}^{nb}|\sin x|\,\mathrm{d}x &= \int_{na}^{(p+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{q\pi}^{nb}|\sin x|\,\mathrm{d}x + \sum_{k=p+1}^{q-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{na}^{(p+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{q\pi}^{nb}|\sin x|\,\mathrm{d}x + \sum_{k=p+1}^{q-1}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\\ &= \int_{na}^{(p+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{q\pi}^{nb}|\sin x|\,\mathrm{d}x + 2(q-p-1).\end{aligned}$$

Les deux premières intégrales sont majorées par π et avec l'encadrement $\frac{n(b-a)}{\pi} - 1 \leqslant q-p \leqslant \frac{n(b-a)}{\pi} + 1$,

on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\frac{b-a}{\pi}$.

- Dans le cas d'une fonction en escalier, $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ étant une subdivision adaptée, on écrit :

$u_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i\int_{a_i}^{a_{i+1}}|\sin nt|\,\mathrm{d}t$ où λ_i est la valeur constante prise par f sur $]a_i, a_{i+1}[$.

Compte tenu de l'étude du cas des fonctions constantes, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i(a_{i+1}-a_i) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f$.

- Dans le cas général, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi : [a,b] \to E$, en escalier, et telle que $\|f-\varphi\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Avec $u_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t$, en écrivant :

$$u_n - \frac{2}{\pi}\int_a^b f = \int_a^b\Big(f(t)-\varphi(t)\Big)|\sin nt|\,\mathrm{d}t + \int_a^b\varphi(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\Big(\int_a^b\varphi(t)-f(t)\Big)\mathrm{d}t,$$

on obtient $\quad\left|u_n - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant 2\,\varepsilon + \left|\int_a^b\varphi(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t\right|$.

L'étude du cas des fonctions en escalier, montre alors l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|\int_a^b\varphi(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

Finalement, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}, n\geqslant n_0 \Rightarrow \left|u_n - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant 3\varepsilon$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_a^b f$.

Ex. 21

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $u_{n+1}^2 \leqslant u_{n+2}u_n$ c'est-à-dire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$: la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante, elle est donc convergente dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

Posons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, le théorème de Cesaro montre que l'on a aussi $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}}$.

Or de $u_n = \displaystyle\int_0^1 fg^n$, on déduit $u_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \|f\|_\infty^{\frac{1}{n}} \|g\|_\infty$ et donc $L \leqslant \|g\|_\infty$: L est fini.

La continuité et la positivité de g sur $[0,1]$ donne l'existence de $x_0 \in [0,1]$ tel que $\|g\|_\infty = g(x_0)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a,b) \in [0,1]^2$, $a < b$, tel que $\forall x \in [a,b]$, $\|g\|_\infty - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant \|g\|_\infty$.

On en déduit $u_n^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\|g\|_\infty - \varepsilon\right) A^{\frac{1}{n}}$ où on a posé $A = \displaystyle\int_a^b f$, puis en passant à la limite : $L \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon$.

En conclusion, on a $L = \|g\|_\infty$.

Ex. 22

1) $x \mapsto x$ est solution.

2) Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $f(x) > 0$ et donc $f(x) = \sqrt{2\displaystyle\int_0^x f}$.

En conséquence f est dérivable sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et en dérivant les deux membres de (E), il vient :

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad 2f(x)f'(x) = 2f(x)$$

d'où $f'(x) = 1$ car f ne s'annule pas.

Il en résulte que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $f(x) \geqslant f(x_0)$ puis que l'ensemble :

$$A = \{x \in [x_0, +\infty[\ /\ \forall t \in [x_0, x],\ f(t) \geqslant f(x_0)\},$$

est non majoré, et qu'il est donc égal à $[x_0, +\infty[$.

Ainsi f est strictement positive sur cet intervalle, puis comme ci-dessus on en déduit $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $f'(x) = 1$ d'où aussi $f(x) = f(x_0) + x - x_0$.

Posons alors $B = \{x \in \mathbb{R}_+^*\ /\ f(x) > 0\}$. D'après ce qui précède, B est un intervalle minoré par 0 et non majoré.

En posant $a = \inf B$, deux cas se présentent :

- si $a = 0$ on a $f(a) = 0$ d'après l'équation (E) et, $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = x$,
- si $a > 0$ la continuité de f en a montre que l'on a encore $f(a) = 0$, puis la relation $\displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = 0$ avec f continue négative sur $[0, a]$ donne que f est identiquement nulle sur $[0, a]$. Alors f est définie par $f(x) = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant a$ et $f(x) = x - a$ pour $x \geqslant a$.

3) Remarquons d'abord que f est solution sur $]-\infty, 0]$ si et seulement si $g\ :\ x \mapsto -f(-x)$ est solution sur $[0, +\infty[$.

Si f est une solution telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant 0$, l'équation (E) donne $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^2(x) \leqslant 0$ donc $f(x) = 0$: f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

On est alors en mesure de donner les quatre types de solutions sur $\mathbb{R}$:

- $f = 0$,
- $f(x) = 0$ sur $]-\infty, a]$, $f(x) = x - a$ sur $[a, +\infty[$ $(a \geqslant 0)$,
- $f(x) = x - b$ sur $]-\infty, b]$, $f(x) = 0$ sur $[b, +\infty[$, $(b \leqslant 0)$,
- $f(x) = x - b$ sur $]-\infty, b]$, $f(x) = 0$ sur $[b, a]$, $f(x) = x - a$ sur $[a, +\infty[$ $(b \leqslant 0 \leqslant a$.

CHAPITRE 5

Séries entières

A. Définition – Rayon de convergence

On rappelle que le symbole $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

Une **série entière** [1] d'une variable complexe (resp. d'une variable réelle) est une série de fonctions $\sum u_n$ pour laquelle il existe une suite complexe (a_n) telle que chaque u_n $(n \in \mathbb{N})$ soit définie par $u_n \ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ \ z \mapsto a_n z^n$ (resp. $u_n \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ \ x \mapsto a_n x^n$).

Une telle série sera notée abusivement $\sum a_n z^n$. [2]

[1] Le qualificatif «entière» provient du fait que chaque u_n est proportionnelle à la fonction «puissance entière» $z \mapsto z^n$.

[2] Cette notation est dangereuse! En effet, elle peut aussi bien désigner la série entière $\sum u_n$, avec $u_n : z \mapsto a_n z^n$, que la série complexe de terme général $a_n z^n$, avec z fixé dans $\mathbb{C}$.

Remarque

Dans le cas d'une variable réelle, si la suite $(a_n)_\mathbb{N}$ est réelle, on obtient une série entière réelle d'une variable réelle.

Exemples

- $\sum z^n : \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1.$
- $\sum z^{2n+1} : \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0, a_{2n+1} = 1.$
- $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{z^n}{n(n-1)} : a_0 = a_1 = 0, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, a_n = \frac{1}{n(n-1)}.$

1. Opérations algébriques sur les séries entières

- **La somme de deux séries entières** $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière associée à la suite $(a_n + b_n)_\mathbb{N}$: $\quad \sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n + b_n) z^n$.
- **Le produit d'une série entière** $\sum a_n z^n$ **par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{C}$ est la série entière associée à la suite $(\lambda a_n)_\mathbb{N}$: $\quad \lambda \sum a_n z^n = \sum (\lambda a_n) z^n$.
- **Le produit de Cauchy de deux séries entières** $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière associée à la suite $(c_n)_\mathbb{N}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$; [3]

$$\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

[3] Ce produit dit **de Cauchy** a été étudié au chapitre 2.

- L'ensemble des séries entières d'une variable complexe (resp. réelle) est, pour ces trois lois, une $\mathbb{C}$-algèbre commutative.
- Le sous-ensemble formé des séries entières réelles d'une variable réelle, est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

2. Rayon de convergence

Définition 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle.

L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \ \sum |a_n| \, r^n \text{ converge}\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.

La borne supérieure ρ de I, dans $\overline{\mathbb{R}}$, [4] est appelée **rayon de convergence de** $\sum a_n z^n$.

[4] Tout intervalle I non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ρ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si I est majoré, ρ est réel. Si I est non majoré, alors $\rho = +\infty$.

I est non vide car $0 \in I$.

Si r est dans I, on a $[0, r] \subset I$, donc I est bien un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.

Remarques

(5) On retiendra pour ρ que celui-ci peut :
– être fini ou infini,
– appartenir ou ne pas appartenir à I.

Tous les cas de figure sont a priori possibles pour l'intervalle I. (5) Plus précisément, celui-ci peut être de l'une quelconques des formes suivantes :

- $I = \{0\}$. Dans ce cas, le rayon de convergence est nul : $\rho = 0$.
  Exemple : $\sum n^n z^n$.

  Pour tout $r > 0$, avec $v_n = n^n r^n$, on a $v_n > 2^n$ dès que $n > \dfrac{2}{r}$,

  donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ et $\sum v_n$ est *a fortiori* divergente.

- $I = [0, +\infty[$. Dans ce cas, le rayon de convergence est infini : $\rho = +\infty$.
  Exemple : $\sum \dfrac{z^n}{n!}$.

  Pour tout $r > 0$, avec $v_n = \dfrac{r^n}{n!}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0$, donc $\sum v_n$ converge.

- $I = [0, \rho[$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Exemple : $\sum z^n$.
  La série géométrique $\sum r^n$, $r \in \mathbb{R}_+$, converge si et seulement si $r < 1$, donc $I = [0, 1[$ et $\rho = 1$.

- $I = [0, \rho]$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Exemple : $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{z^n}{n^2}$.

  Pour tout $r > 1$, avec $v_n = \dfrac{r^n}{n^2}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, donc $\sum v_n$ diverge.

  Pour tout $r \in [0, 1]$, on a $v_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum v_n$ converge. Ainsi, $I = [0, 1]$ et $\rho = 1$.

(6) d'une variable complexe ou réelle.

(7) On notera que, dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, D_ρ est vide lorsque $\rho = 0$.

Définition 3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, (6) de rayon de convergence ρ.
- $z \in \mathbb{C}$: $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} / |z| < \rho\}$ est le **disque ouvert de convergence**.
- $z \in \mathbb{R}$: $D_\rho = \{z \in \mathbb{R} / |z| < \rho\} =]-\rho, \rho[$ est l'**intervalle ouvert de convergence**. (7)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle et son rayon de convergence ρ :

(8) Pour $z \in D_\rho$, on a $|z| < \rho$ donc $|z| \in I$.

Théorème 1

La série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in D_\rho$. (8)

Théorème 2

Lemme d'Abel
Soit $r_0 > 0$; si la suite $\left(|a_n|\, r_0^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors, quel que soit $r \in [0, r_0[$, la série $\sum |a_n|\, r^n$ est convergente.

S'il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n|\, r_0^n \leq A$, alors :

$$\forall r \in [0, r_0[, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n|\, r^n \leq A \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

et la convergence de la série $\sum |a_n|\, r^n$ (à termes réels positifs) résulte de celle de la série géométrique de raison $\dfrac{r}{r_0} < 1$ et du critère de domination.

Théorème 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, (resp. $z \in \mathbb{R}$), tel que $|z| > \rho$, la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée, donc la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Soit $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| > \rho$ et $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $\rho < r < |z|$.
Par définition de ρ, la série $\sum |a_n|\, r^n$ est divergente.
Supposons que la suite $\left(\left|a_n z^n\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée alors, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum |a_n|\, r^n$ serait convergente ce qui est exclu. La conclusion en résulte.

3. Calcul du rayon de convergence

Théorème 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle. Son rayon de convergence ρ est défini par : (9)

a) $\rho = \sup\{|z|, z \in \mathbb{C}, \sum |a_n|\,|z|^n \text{ converge}\}$,

b) $\rho = \sup\{|z|, z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge}\}$,

c) $\rho = \sup\{|z|, z \in \mathbb{C}, (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$,

d) $\rho = \sup\{|z|, z \in \mathbb{C}, \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\}$.

(9) **Remarque** : le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, dont tous les coefficients a_k sont nuls à partir d'un certain rang p, est $+\infty$.
Dans ce cas, la suite des sommes partielles est constante à partir du rang p :

$$\forall n \geq p,\ S_n(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k,$$

on dit qu'il s'agit d'une **série entière polynôme**.

a) par définition de ρ.

b), c) et d) Pour $|z| < \rho$, $\sum a_n z^n$ converge donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$ et $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour $|z| > \rho$, $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée donc cette suite ne tend pas vers 0 et $\sum a_n z^n$ diverge.

Corollaire

Rayon de convergence et relations de comparaison

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières d'une variable complexe ou réelle et de rayons de convergence respectifs ρ_1 et ρ_2.

a) Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ quand $n \to +\infty$, alors $\rho_1 \geq \rho_2$.

b) Si $a_n \sim b_n$ quand $n \to +\infty$, alors $\rho_1 = \rho_2$. (10)

(10) Cependant, les comportements au bord du disque (ou intervalle) de convergence peuvent être différents.

Théorème 5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle et ρ son rayon de convergence.

Si le rapport $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet quand n tend vers $+\infty$ une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, (11) en posant par convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, on a $\rho = \dfrac{1}{\ell}$.

(11) On notera bien qu'il ne s'agit pas là que d'un **cas particulier**. De nombreux exemples de séries entières qui ne rentrent pas dans ce cadre. Voir Exemple 1, c) ou d).

On utilise le critère de d'Alembert.

Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|\,r^{n+1}}{|a_n|\,r^n} = \ell r$ donc, pour $r < \dfrac{1}{\ell}$, $\sum |a_n|\,r^n$ converge et pour $r > \dfrac{1}{\ell}$, $\sum |a_n|\,r^n$ diverge, ce qui prouve que $\rho = \dfrac{1}{\ell}$.

Si $\ell = 0$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|\,r^{n+1}}{|a_n|\,r^n} = 0$ donc $\sum |a_n|\,r^n$ converge et $\rho = +\infty$.

Si $\ell = +\infty$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|\,r^{n+1}}{|a_n|\,r^n} = +\infty$ donc $\sum |a_n|\,r^n$ diverge et $\rho = 0$.

Exemple 1 Déterminer le rayon de convergence ρ de la série $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :

a) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$, $(n \geq 1)$,

b) $a_n = \dfrac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}$, $(n \geq 1)$,

c) $a_n = \tan\dfrac{n\pi}{7}$, $(n \geq 0)$,

d) $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$, $(n \geq 1)$.

On pose $u_n = a_n z^n$, $v_n = |u_n|$ où $z \in \mathbb{C}^*$.

a) $\ln v_n = n \ln|z| + n^2 \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = n\left(\ln|z| - 1\right) - \dfrac{1}{2} + o(1)$.

Ainsi, u_n tend vers 0 si et seulement si $|z| < e$ donc $\rho = e$.

b) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)\ |z|}{4\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{|z|}{8}$, donc $\rho = 8$.

c) Quand n décrit $\mathbb{N}$, $\left|\tan \dfrac{n\pi}{7}\right|$ prend quatre valeurs distinctes : $0, \tan\dfrac{\pi}{7}, \tan\dfrac{2\pi}{7}, \tan\dfrac{3\pi}{7}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |u_n| \leqslant |z|^n \tan\dfrac{3\pi}{7}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

D'autre part, pour $|z| = 1$, $|u_{7n+1}| = \tan\dfrac{\pi}{7}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc u_n ne tend pas vers 0. En conclusion, $\rho = \sup\left\{|z| \,/\, z \in \mathbb{C},\ \lim\limits_{n \to +\infty} a_n z^n = 0\right\} = 1$.

d) On a $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{|z^n|}{n}$ donc $|z| < 1$ donne $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Pour $|z| > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|z|^n}{n} = +\infty$ et, d'autre part, on sait que la suite $n \mapsto \sin n$ ne converge pas vers 0, il en est donc de même pour $\left(\dfrac{|\sin n|\ |z^n|}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Ainsi, $\rho = \sup\left\{|z| \,/\, z \in \mathbb{C},\ \lim\limits_{n \to +\infty} a_n z^n = 0\right\} = 1$.

4. Opérations algébriques et rayon de convergence

Théorème 6

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières d'une variable complexe - ou réelle - de rayon de convergence respectifs ρ_1 et ρ_2. Alors :

a) Le rayon de convergence ρ de la série **somme** $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie :

- lorsque $\rho_1 \neq \rho_2$: $\rho = \inf(\rho_1, \rho_2)$,
- lorsque $\rho_1 = \rho_2$: $\rho \geqslant \rho_1$.

Donc, dans tous les cas, $\rho \geqslant \inf(\rho_1, \rho_2)$. (12)

b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

c) Le rayon de convergence ρ' de la série **produit de Cauchy** : $\sum c_n z^n$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ vérifie : $\rho' \geqslant \inf(\rho_1, \rho_2)$. (13)

(12) Dans le cas où $\rho_1 = \rho_2$, le rayon ρ de la série somme peut être tel que $\rho > \rho_1$. Par exemple, $\sum\left(\frac{1}{n!}+1\right)z^n$ et $\sum\left(\frac{1}{n!}-1\right)z^n$ ont le même rayon de convergence égal à 1 et la série somme a un rayon de convergence infini.

(13) Là aussi, l'inégalité peut être stricte. Par exemple, le produit des deux séries entières $1-z$ (série entière polynôme) et $\sum z^n$ est 1. Et on a $\rho_1 = +\infty$, $\rho_2 = 1$, $\rho' = +\infty$.

a) Pour $z \in \mathbb{K}$, tel que $|z| < \inf(\rho_1, \rho_2)$, $\sum (a_n + b_n) z^n$ est absolument convergente comme somme de deux séries absolument convergentes. Donc $\rho \geqslant \inf(\rho_1, \rho_2)$.

Si $\rho_1 < \rho_2$, pour $z \in \mathbb{K}$, tel que $\rho_1 < |z| < \rho_2$, $\sum (a_n + b_n) z^n$ est divergente comme somme d'une série convergente et d'une série divergente. Donc, ici, $\rho = \inf(\rho_1, \rho_2)$.

b) La multiplication par un scalaire non nul ne modifie pas la nature d'une série numérique.

c) Même raisonnement qu'en a) en utilisant que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergent. (cf. chapitre 2.)

Corollaire

Si $\rho_1 = \rho_2$ et si les suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ sont telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$, (14) alors la série somme a pour rayon $\rho = \rho_1 = \rho_2$.

(14) Dans cette situation, nous dirons que les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont **disjointes** : si a_n est non nul, b_n est nul et réciproquement.

Pour $r > \rho_1$, la suite $\left(|a_n|\, r^n\right)$ est non majorée.

Or, dans ce cas, $|a_n + b_n| = |a_n| + |b_n|$, donc $\left(|a_n + b_n|\, r^n\right)$ est non majorée, et on en déduit $\rho \leqslant \rho_1$. On conclut avec le théorème **6** a).

Exemple 2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right| = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}}\right| = 2$.

Calculer son rayon de convergence.

De $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{2n}}{a_{2n+2}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n+3}}\right| = 2$, on déduit que les deux séries $\sum a_{2n}z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}z^{2n+1}$ ont le même rayon de convergence égal à $\sqrt{2}$.

$\sum a_n z^n$ étant somme de ces deux séries disjointes, on a encore $\rho = \sqrt{2}$.

Théorème 7

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières d'une variable complexe - ou réelle - de rayons de convergence respectifs ρ_1 et ρ_2. Alors :

a) Quel que soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < \inf(\rho_1, \rho_2)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)z^n = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n + \mu\sum_{n=0}^{+\infty}b_n z^n.$$

b) Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < \inf(\rho_1, \rho_2)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n z^n\right).$$

D'après le chapitre 2, la formule du a) est vraie dès que les séries sont convergentes et celle du b) dès qu'elles sont absolument convergentes.

5. Continuité de la somme dans le disque ouvert de convergence

Théorème 8

Une série entière de variable complexe ou réelle $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque compact $\overline{D}_R$ inclus dans le disque ouvert de convergence D_ρ : $0 \leqslant R < \rho$. (15)

(15) On définit la convergence normale comme dans le cas de la variable réelle : la série de fonction $\sum u_n$, $u_n : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, converge normalement sur une partie A si et seulement si la série de terme général $\| u_n \|_\infty^A = \sup\limits_{z\in A}|u_n(z)|$ est convergente.

$\overline{D}_R = \{z \in \mathbb{K} / |z| \leqslant R\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{z\in\overline{D}_R}|a_n z^n| = |a_n| R^n$.

La convergente normale de $\sum a_n z^n$ sur $\overline{D}_R$ résulte de la convergence de la série numérique $\sum |a_n| R^n$ et du critère de domination.

Théorème 9

La somme f d'une série entière de rayon $\rho > 0$ est une fonction continue sur le disque ouvert de convergence.

Soit $z_0 \in D_\rho$, il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|z_0| < R < \rho$.

La restriction f_R de f à $\overline{D}_R$ est continue sur $\overline{D}_R$, car, d'après le théorème 8, il s'agit de la somme d'une série, normalement convergente sur $\overline{D}_R$, de fonctions continues sur $\overline{D}_R$ (fonctions polynômes). (16)

(16) Le théorème établi dans le chapitre 3 donnant, dans le cas de la variable réelle, la continuité de la somme d'une série normalement convergente de fonctions continues, reste vrai dans le cas de la variable complexe. La démonstration est inchangée.

Posons $r = R - |z_0|$, on a $r > 0$ et $\overline{D}_R$ contient la boule ouverte $B(z_0, r)$. Donc, la restriction de f à cette boule est continue en z_0.

D'après le caractère local de la continuité (voir dans le chapitre 1 la remarque relative à la définition 25), il en résulte que f est continue en z_0.

Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in D_\rho$, on en conclut finalement que f est continue sur D_ρ

Remarque

Une série entière de rayon de convergence ρ n'est en général pas uniformément convergente sur le disque D_ρ.

Soit, par exemple, la série entière d'une variable réelle $\sum x^n$. On a ici $D_\rho =]-1,1[$.
On sait, (voir chapitre **3**), que si une série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur une partie A, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \| u_n \|_\infty^A = 0$.

Dans l'exemple proposé, $u_n : x \mapsto x^n$, on a $\|u_n\|_\infty^{]-1,1[} = 1$, la convergence n'est donc pas uniforme sur $]-1,1[$.

B. Séries entières d'une variable réelle Intégration – Dérivation

1. Intégration

Théorème 10

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle [17] de rayon $\rho > 0$.
Pour tout x réel tel que $0 < |x| < \rho$, on a :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

[17] La variable est réelle, les coefficients sont complexes ou réels.

C'est une conséquence immédiate de la convergence normale de la série proposée sur $[0,x]$ (cf. théorème **8**) et du théorème d'intégration terme à terme d'une série normalement convergente sur un segment (cf. chapitre **3**, théorème **11**).

Théorème 11

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière d'une variable réelle de rayon ρ, la série entière $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, qui est déduite de $\sum a_n x^n$ par **intégration terme à terme**, a le même rayon de convergence.

Soit ρ_1 le rayon de convergence de $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Supposons $|x| < \rho$. Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$ et, puisque $\frac{|a_n|}{n+1} \leqslant |a_n|$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$ donc $|x| \leqslant \rho_1$. Ceci prouve $\rho \leqslant \rho_1$ **(1)**. [18]

[18] car on a prouvé $]0,\rho[\subset]0,\rho_1]$

Supposons $|x| < \rho_1$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x| < \lambda < \rho_1$ donc tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} = 0.$$

Remarquons que $(n+1)\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^n$ est, d'après la règle de d'Alembert, le terme général d'une série convergente, [19] on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^n = 0$

et, en écrivant $\left|a_n x^n\right| = \frac{1}{\lambda} \left| a_n \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} \right| \cdot (n+1)\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^n$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$.

[19] avec $v_n=(n+1)\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|x|}{\lambda} < 1$.

On a ainsi prouvé $\rho_1 \leqslant \rho$ **(2)**.
De (1) et (2) on déduit $\rho_1 = \rho$.

Remarques

1) Les deux séries $\sum a_n x^n$ et $\sum a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ ont le même intervalle ouvert de convergence, mais elles peuvent avoir des comportements différents au bord de cet intervalle.

Par exemple, $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^{n-1}}{n}$ diverge pour $x = 1$ mais $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge pour $x = 1$.

2) Le théorème 11 est valable pour les séries entières de la variable complexe.

Exemple 3 Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, \quad \ell n(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\quad \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad$ (série géométrique).

Par application du théorème 10, on en déduit :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ell n(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

<u>Remarque</u> En admettant que la somme de la série entière $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$ est continue sur $]-1, 1]$, il vient que $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ell n(1+x) = \ell n\, 2,$

d'où, finalement $\quad \forall x \in]-1, 1], \quad \ell n(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$. ✎[20]

✎[20] **Remarque** La validité de la formule précédente en $x=1$ peut être établie directement, sans recours au théorème 10. (Voir chapitre 2, exemple 2.)

2. Dérivation

Définition 4

Étant donné une série entière d'une variable réelle ✎[21] $\sum a_n x^n$:

- la série dérivée première est $\quad \sum_{n\geq 1} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$;
- la série dérivée deuxième est $\quad \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$;
- Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la série dérivée $p^{\text{ième}}$ est :

$$\sum_{n\geq p} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$$

✎[21] On donne les mêmes définitions dans le cas de la variable complexe.

Théorème 12

Si une série entière d'une variable réelle a pour rayon de convergence ρ, toutes ses séries dérivées ont aussi pour rayon de convergence ρ. ✎[22]

✎[22] Ce résultat reste valable pour les séries entières de la variable complexe.

☞ En remarquant que $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ se déduit de $\sum_{n\geq 1} n\, a_n x^{n-1}$ par intégration terme à terme puis en appliquant le théorème 11, on voit qu'une série entière d'une variable réelle et sa série dérivée première ont même rayon de convergence.

La conclusion résulte alors de ce que la série dérivée $(k+1)^{\text{ième}}$ est la série dérivée première de la série dérivée $k^{\text{ième}}$. ✎[23]

✎[23] avec une récurrence évidente.

Théorème 13

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle de rayon $\rho > 0$, f sa somme et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f_p la somme de la série dérivée $p^{\text{ième}}$. On a alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-\rho, \rho[, f_p(x) = f^{(p)}(x).$$

Relation que l'on peut écrire :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-\rho, \rho[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^p}{dx^p}(a_n x^n) = \frac{d^p}{dx^p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right).$$

On dit encore que les dérivations s'effectuent terme à terme à tout ordre.

☞ D'après le théorème **10**, on a $\quad \forall x \in]-\rho, \rho[, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t.$

f_1 étant continue sur $]-\rho, \rho[$, on en déduit $\quad f'(x) = f_1(x).$

Une récurrence immédiate donne la conclusion pour les dérivées $p^{\text{ièmes}}$.

Théorème 14

La somme f d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $\rho > 0$ est indéfiniment dérivable sur $]-\rho, \rho[$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. ✎[24]

✎[24] C'est un corollaire du théorème **13** et de l'expression de la série dérivée $p^{\text{ième}}$.

Théorème 15

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières d'une variable réelle de rayons respectifs ρ et ρ' non nuls.

Supposons $0 < \rho \leq \rho'$. S'il existe α, $\quad 0 < \alpha < \rho \quad$ tel que :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \text{alors} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n.$$

☞ En effet, on a $\quad \forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - b_n)x^n = 0.$

Donc, d'après le théorème **14**, $\quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n - b_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad$ où f est la fonction nulle sur $]-\alpha, \alpha[$, et il en résulte $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n - b_n = 0.$

Application pratique

Pour montrer qu'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞ au voisinage V d'un point $a \in \mathbb{R}$, il suffit d'exhiber une série entière dont la somme coïncide avec $x \mapsto g(a + x)$ sur V.

Exemple 4 Montrer que g, prolongement par continuité de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x-1}$ sur $]0, +\infty[$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

On a ici $g(1) = 1$. Le seul problème est bien sûr en 1. $\quad$ Posons, pour tout $u \in]-1, 1[$,

$f(u) = g(1 + u)$. $\quad$ On a ainsi, pour $u \neq 0$, $\quad f(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u} \quad$ et $\quad f(0) = 1$.

On déduit de l'exemple **3** que $\quad \forall u \in]-1, 1[, \quad f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^n}{n+1}$.

f est donc de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ et g est de classe C^∞ sur $]0, 2[$.

D'autre part, g est clairement de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ d'où finalement : $g \in C^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

C. Développement en série entière

1. Fonctions développables

[25] U est un voisinage de 0 si et seulement si il existe $r>0$ tel que $U \supset B(0,r)$. (Avec $B(0,r)=]-r,r[$ lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$). La fonction f est dite définie au voisinage de 0 lorsque son ensemble de définition contient un voisinage U de 0.

Définition 5

Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ définie au voisinage de 0.
On dit que f est **développable en série entière en 0** (ou à l'origine) quand il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon ρ **non nul** et un voisinage [25] U de 0 tels que :

$$\forall z \in U, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On notera que l'on a nécessairement $U \subset \overline{D}_\rho \cap \mathrm{Def}(f)$ où $\mathrm{Def}(f)$ est l'ensemble de définition de f.

[26] U est un voisinage de z_0 si et seulement si il existe $r>0$ tel que $U \supset B(z_0,r)$. (Avec $B(z_0,r)=]z_0-r,z_0+r[$ lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$). La fonction f est dite définie au voisinage de z_0 lorsque son ensemble de définition contient un voisinage U de z_0.

Définition 6

Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ définie au voisinage de z_0.
On dit que f est **développable en série entière en** z_0 si et seulement si $g : z \to f(z_0+z)$ est développable en série entière à l'origine, donc si et seulement si il existe une série entière $\sum a_n z^n$ **de rayon** ρ **non nul** et un voisinage [26] U de z_0 tel que :

$$\forall z \in U, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Exemple

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ est développable en série entière à l'origine.

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, on a $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

[27] Dans la suite, nous pourrons nous limiter à des développements à l'origine.

Propriété 1

La définition **6** ramène tout problème de développement en série entière à un problème de développement en série entière à l'origine. [27]

[28] C'est un corollaire du théorème **7**.

Propriété 2

Si f et g, fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$, sont développables en série entière à l'origine, il en est de même de $\lambda f + \mu g$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et de fg.
L'ensemble des fonctions développables en série entière à l'origine est donc une $\mathbb{C}$-algèbre (sous-algèbre des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$ définie au voisinage de 0). [28]

2. Développement des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

[29] C'est un corollaire du théorème **14**.

Théorème 16

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière à l'origine, f est de classe C^∞ au voisinage de 0, et cette série est $\quad \sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. [29]

[30] C'est une série entière de la variable $x-a$.

Définition 7

Étant donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on appelle **série de Taylor** de f en a, la série entière $\quad \sum \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. [30]

Dans le cas où $a=0$, $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est dite **série de Mac Laurin** de f.

Théorème 17

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière à l'origine (resp. en a), ce développement est unique : c'est la série de Mac Laurin de f (resp. la série de Taylor de f en a).

Théorème 18

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière à l'origine (resp. en a), toutes ses dérivées le sont également.

Exemple de fonction de classe C^∞ non développable en série entière

✎ (31) Cet exemple montre que les conditions : «f est de classe C^∞ au voisinage de 0» et «la série de Mac Laurin de f a un rayon non nul» ne sont donc pas suffisantes pour assurer que f est développable en série entière à l'origine.

Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. ✎ (31)

On établit, par récurrence, la propriété (H_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(H_n) : f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$,

où P_n est un polynôme.

La propiété (H_0) est vraie.

En supposant (H_n) vraie, on obtient que $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ avec $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-\frac{1}{x^2}}$ ce qui donne, quand x tend vers 0, $f^{(n+1)}(x) = O\left(\dfrac{1}{x^{3(n+1)}} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$.

Dans ces conditions le théorème de caractérisation des applications de classe C^1 (cf. chapitre **4**, théorème **10**) donne que $f^{(n)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n+1)}(0) = 0$.

En tenant compte du calcul de $f^{(n+1)}(x)$ sur $\mathbb{R}^*$, on a ainsi prouvé que (H_{n+1}) est vraie.

Donc, par récurrence, (H_n) est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

En conclusion, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et la série de Mac Laurin de f est la série nulle.

Puisque f ne s'annule qu'en 0, il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ce qui prouve que f n'est pas développable en série entière à l'origine.

3. Développements obtenus par la formule de Mac Laurin

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ sur $V =]-\alpha, \alpha[$, $(\alpha > 0)$, telle que la série de Mac Laurin ait un rayon ρ non nul.

3.1 – Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in V$, posons $\quad R_n(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

On sait que $\quad |R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!} \sup\limits_{t \in [0,x]} \left| f^{(n)}(t) \right|$ c'est-à-dire $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!} \|f^{(n)}\|_\infty^{[0,x]}$.

Par définition, pour que f soit développable en série entière à l'origine, **il faut et il suffit** qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\quad \forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

Une **condition suffisante** est donc qu'il existe $\alpha > 0$, et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M.$$

En effet, on a alors $\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad |R_n(x)| \leqslant M \dfrac{\alpha^n}{n!}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ car $M \dfrac{\alpha^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente.

3.2 – Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in V,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$

Donc $$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$

Par définition, pour que f soit développable en série entière à l'origine, **il faut et il suffit** qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\quad \forall x \in]-\alpha, \alpha[,\ \lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t = 0.$

Applications

1) Cosinus La série de Mac Laurin est $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ de rayon de convergence $\rho = +\infty$.

La condition suffisante du 3.1 s'applique. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{donc} \quad \left|\cos^{(n)} x\right| \leqslant 1.$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$

2) Sinus Comme ci-dessus, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

3) Exponentielle népérienne La série de Mac Laurin est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ de rayon $\rho = +\infty$.

Pour tout x réel, l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, x]$ donne $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}$.

La conclusion en résulte car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{|x|^n}{n!}$ tend vers 0 comme terme général d'une série convergente. $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

4) $f : x \mapsto (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, +\infty[, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1), \ldots, (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

- La série de Mac Laurin de f est donc :

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \text{de rayon } \rho = 1.$$ (32)

- Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, le reste intégral d'ordre n de la formule de Mac Laurin sur $[0, x]$ est : $R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1}\mathrm{d}t.$

Étant donné que $\rho = 1$, on se limite à $|x| < 1$.

En écrivant : $\quad \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t,$

de $\forall t \in [0, x], \quad \left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|,$ (33) on déduit :

$|R_n(x)| \leqslant |\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)| \frac{|x|^n}{n!} A(x)$, en posant $A(x) = \left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t\right|.$ (34)

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)| \frac{|x|^n}{n!}$ est, d'après le critère de d'Alembert, le terme général d'une série convergente, donc il tend vers 0, donc $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

On retiendra :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (\rho = 1)$$

(32) car avec $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(33) On peut prouver cette inégalité en étudiant les variations de $t \mapsto \frac{x-t}{1+t}$.

(34) $A(x)$ ne dépend pas de n.

4. Autres méthodes de développement

4.1 – Intégration de développements connus

On applique les théorèmes **10** et **11**.

Partant de $\quad \forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad (\rho = 1),$

on a déjà obtenu par cette méthode : [35]

(35) Cf. exemple 3.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1).$$ [36]

(36) On peut montrer que cette série converge uniformément sur $[0,1]$. Sa somme est donc continue en 1 et l'égalité reste vraie en 1.

Une conséquence immédiate est :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1).$$

- De manière analogue, en partant de $\forall x \in]-1,1[, \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, $(\rho = 1)$, il vient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\rho = 1)$$ [37]

(37) On peut montrer que la série converge uniformément sur $[-1,1]$ et donc que l'égalité reste vraie en 1 et en -1.

- Partant de $\forall x \in]-1,1[, \dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}, (\rho = 1)$ et $\operatorname{Argth} x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$,

on obtient $\quad \forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Argth} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\rho = 1).$

4.2 – Dérivation de développements connus [38]

(38) On applique les théorèmes 12 et 13.

- Partant de $\quad \forall x \in]-1,1[, \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, (\rho = 1),$

et $\quad \dfrac{1}{(1-x)^p} = \dfrac{1}{(p-1)!} \dfrac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \left(\dfrac{1}{1-x} \right) \quad p \in \mathbb{N}^*,$

on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=p-1}^{+\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-p+2)}{(p-1)!} x^{n-p+1} \quad (\rho = 1)$$

ou encore $\quad \dfrac{1}{(1-x)^p} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+p-1}^{p-1} x^n.$

- Il peut être utile de savoir que le résultat précédent reste vrai sur $\mathbb{C}$. [39]

(39) En particulier, pour développer les fonctions rationnelles.

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto \dfrac{1}{1-tz}$.

Pour tout $t \in \left] -\dfrac{1}{|z|}, \dfrac{1}{|z|} \right[$, on a $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n z^n$ donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} t^n z^{n+p}.$$

Comme par ailleurs $f^{(p-1)}(t) = \dfrac{(p-1)! z^{p-1}}{(1-tz)^p}$, il vient :

$$\forall t \in \left] -\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|} \right[, \frac{1}{(1-tz)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} t^n z^n,$$

donc, pour $t = 1$, $\quad \dfrac{1}{(1-z)^p} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+p-1}^{p-1} z^n.$ [40]

(40) **Remarque** : on peut aussi obtenir ce résultat par récurrence en utilisant les produits de séries entières.

4.3 – Combinaison linéaire de développements connus

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad , \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$

On en déduit :

$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \; (\rho = +\infty) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \; (\rho = +\infty).$

- Pour développer une fonction rationnelle (n'admettant pas le pôle 0), on commence par la décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{C}$ éventuellement, pour faire apparaître une combinaison linéaire de fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^p}$.

Par exemple, pour $f \; : \; x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x\sqrt{3} + 4}$, les pôles sont $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} - i$ soit aussi $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et la décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\frac{1}{x^2 - 2x\sqrt{3} + 4} = \frac{i}{2\left(x - 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)} - \frac{i}{2\left(x - 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)},$$

d'où :

$$f(x) = \frac{i}{4} e^{-i\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 - \frac{x}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}} - \frac{i}{4} e^{i\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 - \frac{x}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}}.$$

On en déduit : $\quad \forall x \in]-2, 2[, f(x) = \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} e^{-(n+1)i\frac{\pi}{6}} - \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} e^{(n+1)i\frac{\pi}{6}}$ [41]

soit :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \sin\left[(n+1)\frac{\pi}{6}\right]$$

Le rayon de convergence ρ vérifie $\rho \geq 2$. En observant que, pour $x = 2$, la série est grossièrement divergente, on obtient $\rho \leq 2$, et finalement $\rho = 2$. [42]

[41] $\left|\frac{x}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = \frac{|x|}{2}$ et $\left|\frac{x}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = \frac{|x|}{2}$, montre que ces deux séries ont un rayon de convergence égal à 2.

[42] Il faut prendre garde au fait que lorsque l'on effectue une combinaison linéaire de deux séries entières de même rayon de convergence ρ, le rayon final est a priori supérieur ou égal à ρ. Sur chaque exemple une étude supplémentaire sera alors nécessaire pour en donner la valeur précise.

4.4 – Produit de développements connus

- $\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1), \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad (\rho = 1).$

On en déduit $\forall x \in]-1, 1[, \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$

Le rayon de convergence ρ de cette série est a priori supérieur ou égal à 1. Il suffit de constater que $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ ne tend pas vers 0 pour conclure que $\rho = 1$.

4.5 – Utilisation d'une équation différentielle

Soit $f \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ au voisinage de 0.

Supposons avoir exhibé une équation différentielle (E) et un intervalle ouvert I contenant 0 tels que la restriction de f à I soit l'unique solution de (E) sur I vérifiant certaines conditions initiales.

Supposons avoir déterminé une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $\rho > 0$ dont la somme est solution de (E) sur $]-\rho, \rho[$ et vérifie les mêmes conditions initiales.

On a alors $\quad \forall x \in I \cap]-\rho, \rho[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$

- Considérons, par exemple, la fonction exponentielle $\quad \exp : x \mapsto e^x$.

exp est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de $(E) : y' - y = 0$ telle que $f(0) = 1$.

✎(43) Pour déterminer une série entière solution du problème, on procède par analyse-synthèse.

Analyse ✎(43) Supposons qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon ρ non nul dont la somme S est solution de (E) sur $]-\rho, \rho[$ et vérifie $S(0) = 1$. On a alors :

$$\forall x \in]-\rho, \rho[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

c'est-à-dire, par unicité du développement en série entière quand il existe :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)a_{n+1} = a_n \quad \textbf{(1)}.$$

Remarquons que la relation **(1)** permet de calculer ρ avant d'avoir déterminé la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$.

En effet, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ donc $\rho = +\infty$.

De **(1)**, on déduit $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{a_0}{n!}$. D'autre part, la condition $S(0) = 1$ donne $a_0 = 1$.

Ainsi, il existe au plus une série entière de rayon $\rho > 0$ dont la somme S est solution de (E) sur $]-\rho, \rho[$ et vérifie $S(0) = 1$, il s'agit de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ $(\rho = +\infty)$.

✎(44) On remarquera que la synthèse revient en fait à vérifier que ρ est non nul.

Synthèse ✎(44) La série précédente a un rayon de convergence non nul, ses coefficients a_n vérifient $a_0 = 1$ et la relation **(1)** donc sa somme S est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $S(0) = 1$.

Conséquence : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Remarque

Il apparaît que cette méthode est exploitable avec des équations différentielles **linéaires** (d'ordre $n = 1, 2$ en général) : $a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = b(x)$ dont les coefficients $a_i(x)$, $0 \leq i \leq n$, sont **polynomiaux** (simples) et dont on connaît un développement en série entière à l'origine du second membre $b(x)$.

5. Sommation des séries entières

✎(45) **Remarque :** on n'oubliera pas de commencer par déterminer le rayon de convergence de la série proposée.

C'est le problème inverse de celui du développement en série entière. ✎(45)

Il s'agit, en utilisant les résultats établis dans le paragraphe précédent, d'exprimer la somme d'une série entière au moyen des fonctions usuelles.

On utilisera essentiellement deux méthodes.

1) On fait apparaître que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ s'écrit simplement en fonction des développements usuels.

   Pour y parvenir on pourra penser à :

   - linéariser a_n ce qui décompose $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ou une combinaison linéaire de développements connus ou susceptibles d'être traités au moyen de l'un ou l'autre des procédés suivants :
   - reconnaître un produit de développements connus ;
   - un changement de variable ;
   - une dérivation ou une intégration.

2) On détermine une équation différentielle dont la somme proposée est solution.

Exemple 5 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$. ✎[46]

✎[46] Ici, on opère en deux temps.
1) une linéarisation de $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$ décompose la somme proposée en combinaison linéaire de développements plus simples ;
2) pour chacun de ceux-ci, un changement de variable ramène à des développements usuels.

✎[47] On applique le théorème 5.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$ et $u_n(x) = \frac{nx^n}{(2n+1)!}$.

On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2n(2n+3)}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ et le rayon de convergence est $\rho = +\infty$. ✎[47]

On a $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) = \frac{1}{2}\frac{(2n+1)-1}{(2n+1)!}x^n = \frac{1}{2}\left(\frac{x^n}{(2n)!} - \frac{x^n}{(2n+1)!}\right)$

donc $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}\right)$

(toutes ces séries ont un rayon infini).

- Pour $x > 0$, en posant $u = \sqrt{x}$: $S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{u}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

  donc $\quad S(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} u - \frac{\operatorname{sh} u}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{x} - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$.

- Pour $x < 0$, en posant $u = \sqrt{-x}$: $S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{u}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

  donc $\quad S(x) = \frac{1}{2}\left(\cos u - \frac{\sin u}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\sqrt{-x} - \frac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\right)$.

- Pour $x = 0$, il est immédiat que $S(0) = 0$.
  On remarquera que ce calcul montre que la fonction S définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $$\begin{cases} S(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\sqrt{-x} - \frac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\right) & \text{pour } x < 0 \\ S(0) = 0 & \\ S(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{x} - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$
  est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas une évidence a priori.

Exemple 6 calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$ et $u_n(x) = a_n x^{2n}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{2(2n+3)}{n+1}x^2$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = 4x^2$ et le rayon de convergence est $\rho = \frac{1}{2}$. ✎[48]

✎[48] Attention ! on n'est pas dans les conditions d'application du théorème 5, on revient donc à l'étude de $\sum |a_n x^{2n}|$. D'après la règle de d'Alembert, pour $|x| < \frac{1}{2}$, la série $\sum |a_n x^{2n}|$ converge et pour $|x| > \frac{1}{2}$, elle diverge.

Pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ donne :
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^{2n+1}.$$

Alors la relation $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+3)a_n$ donne :
$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2na_n x^{2n+1} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

d'où : $$(1-4x^2)f'(x) = 12xf(x).$$

Ainsi f est l'unique solution sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$, de l'équation différentielle (E) : $(1-4x^2)y' - 12y = 0$. ✎[49]

✎[49] On pourra éventuellement consulter le chapitre 8.

On en déduit : $$f(x) = (1-4x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

D. La fonction exponentielle complexe

Définition 8

La fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est appelée fonction **exponentielle complexe**.

On sait que, pour tout x réel, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. La fonction ainsi définie est donc un prolongement de l'exponentielle réelle, ce qui permet de noter, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$.

Propriété 3

$z \mapsto e^z$ est une fonction continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. (60)

(60) C'est la somme d'une série entière de rayon $\rho = +\infty$.

Propriété 4

a) $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$. (51)

b) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$.

c) $\exp : z \mapsto e^z$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

d) $\forall z \in \mathbb{C}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

e) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^z)^n = e^{nz}$.

(51)
a) Voir chapitre 2, Exemple 11.
b) S'il existait $z_0 \in \mathbb{C}$, tel que $e^{z_0} = 0$, d'après a), e^z serait identiquement nulle.
d) et e) sont des propriétés du morphisme de groupes.

Propriété 5

Module et argument de e^z

$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, $\arg e^z = \mathrm{Im}(z)$.

Posons $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $e^z = e^x e^{iy}$. En revenant à la définition :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$e^{iy} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{y^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

il vient donc $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Exemple 7 Développer en série entière à l'origine la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x \sin x$. (52)

(52) f est développable en série entière de rayon de convergence infini car c'est le produit de deux telles fonctions.

Écrivons $f(x) = \frac{1}{2i}\left[e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}\right] = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(1+i)^n - (1-i)^n\right] \frac{x^n}{n!}$.

De $(1+i) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $(1-i) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, on déduit :

$$\frac{1}{2i}\left[(1+i)^n - (1-i)^n\right] = (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4} \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Notons que
$$\sin \frac{n\pi}{4} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 4p \\ \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad n = 4p+1 \\ (-1)^p & \text{si} \quad n = 4p+2 \\ \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad n = 4p+3 \end{cases}$$

d'où $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^{2p}}{(4p+1)!} x^{4p+1} + \frac{(-1)^p 2^{2p+1}}{(4p+2)!} x^{4p+2} + \frac{(-1)^p 2^{2p+1}}{(4p+3)!} x^{4p+3}$.

Exemple 8 Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \sin n\alpha}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La série $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ converge quel que soit x donc, avec $\left|\frac{x^n \sin n\alpha}{n!}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}$, on voit que le rayon de convergence de la série proposée est infini.

Notons f la fonction somme. De $\sin n\alpha = \operatorname{Im} e^{in\alpha}$, on déduit :

$$f(x) = \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(xe^{i\alpha}\right)^n}{n!} = \operatorname{Im} e^{xe^{i\alpha}} \quad (53)$$

$$\text{soit} \quad f(x) = e^{x\cos\alpha} \sin(x \sin\alpha).$$

(53) On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Propriété 6

Équation $e^z = a \quad a \in \mathbb{C}$.

Posons $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la propriété 5, $e^z = a$ équivaut à $e^x = |a|$, $y = \arg(a) \pmod{2\pi}$, donc :

$$z = \ell n\, |a| + i \arg a + 2ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de cette équation sont appelées **les logarithmes** de a. (54)

(54) On prendra bien garde au fait que l'on ne définit pas le logarithme d'un nombre complexe.

Application

$e^{z'} = e^z$ équivaut à $e^{z'-z} = 1$ donc à $z' = z + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

le noyau de la fonction exponentielle (55) est $2i\pi\mathbb{Z}$.

(55) Morphisme de groupes de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Propriété 7

L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ définit une bijection continue de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ (56) dont l'application réciproque $u \mapsto \operatorname{Arg} u$ est continue.

Pour $u = x + iy$ avec $x^2 + y^2 = 1$ et $x \neq -1$, on a :

$$\operatorname{Arg} u = 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{1+x}\right).$$

(56) Rappelons que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des complexes de module égal à 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \setminus |z| = 1\}$.

Notons f l'application définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(\theta) = e^{i\theta}$.

Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $-1 < \cos\theta \leqslant 1$ donc $f(]-\pi, \pi[) \subset \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ **(1)**.

Montrons maintenant que tout élément $u = x + iy$ de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ a un antécédent θ et un seul par f dans $]-\pi, \pi[$.

<u>Analyse</u> : Si $\theta \in]-\pi, \pi[$ vérifie $f(\theta) = u$, on a $\cos\theta = x$ et $\sin\theta = y$.

Puisque $x \neq -1$, on en déduit $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{y}{1+x}$, donc $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y}{1+x}$ ce qui, compte tenu de $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, donne $\frac{\theta}{2} = \operatorname{Arctan}\frac{y}{1+x}$. (57)

<u>Synthèse</u> :

Avec $\theta = 2\operatorname{Arctan}\frac{y}{1+x}$, on a $-\pi < \theta < \pi$ et le calcul donne : (58)

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{(1+x)^2 - y^2}{(1+x)^2 + y^2} = \frac{2x(1+x)}{2(1+x)} = x$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2y(1+x)}{2(1+x)} = y$$

(57) À ce niveau, on voit que u a au plus un antécédent par f.

(58) On utilise $y^2 = 1 - x^2$.

c'est-à-dire $e^{i\theta} = u$ ou encore $f(\theta) = u$.
On a ainsi prouvé que tout élément de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ a un antécédent et un seul dans $]-\pi, \pi[$.
Compte tenu de (1), on en déduit que $f\left(]-\pi, \pi[\right) = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ et que f est une bijection de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$. La bijection réciproque f^{-1} est définie par :

$$f^{-1} : \mathbb{U} \setminus \{-1\} \to]-\pi, \pi[,\quad x + iy \mapsto 2\operatorname{Arctan} \frac{y}{1+x}.$$

Corollaire 1

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left(\mathbb{R}_- \times \{0\}\right)$, il existe (r, θ) unique, $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in]-\pi, \pi[$, tel que

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

et on a :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

☞ On applique la propriété **7** à $z = \dfrac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

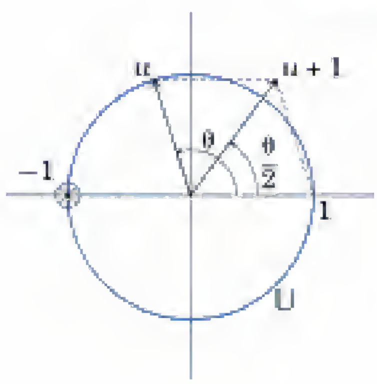
Corollaire 2

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tout point M situé en dehors de la demi-droite $Ox^- = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}_-\}$ admet un et un seul couple (r, θ) de coordonnées polaires tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Si $M = O + x\vec{i} + y\vec{j}$, on a alors $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \theta = 2\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

☞ C'est la version géométrique du corollaire 1.

Remarques



1) La formule précédente exprime que : $\operatorname{Arg} u = 2\operatorname{Arg}(u+1)$.

2) Posons $\mathbb{U}^+ = \{u \in \mathbb{U} / \operatorname{Im} u > 0\}$ et $\mathbb{U}^- = \{u \in \mathbb{U} / \operatorname{Im} u < 0\}$.

Pour $u = x + iy \in \mathbb{U}^+$, on a $y = \sqrt{1 - x^2}$ d'où :

$$f^{-1}(u) = 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

et pour $u \in \mathbb{U}^-$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$ d'où :

$$f^{-1}(u) = -2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Il en résulte : $\displaystyle \lim_{\substack{u \to -1 \\ u \in \mathbb{U}^+}} f^{-1}(u) = \pi$ et $\displaystyle \lim_{\substack{u \to -1 \\ u \to \mathbb{U}^-}} f^{-1}(u) = -\pi$,

donc f^{-1} ne se prolonge pas en une application continue sur $\mathbb{U}$.

Méthodes

L'essentiel

I. Rayon de convergence

Pour toute série entière $\sum a_n z^n$, notons $\rho\left(\sum a_n z^n\right)$ son rayon de convergence.

✔ **Si l'on veut** montrer que $\rho\left(\sum a_n z^n\right) \geq R$, $R \in \mathbb{R}_+$,

- **on peut**
  - essayer d'exhiber $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| = R$ et «$\sum a_n z^n$ converge»
  - essayer d'exhiber $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| = R$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$
  - prouver que pour tout $r \in [0, R[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$ ou que, pour tout $r \in [0, R[$, $\sum a_n r^n$ converge.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2, 3

✔ **Si l'on veut** montrer que $R \geq \rho\left(\sum a_n z^n\right)$, $R \in \mathbb{R}_+$,

- **on peut**
  - essayer d'exhiber $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| = R$ et «$\sum a_n z^n$ diverge»
  - essayer d'exhiber $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| = R$ et $(a_n z^n)_{\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0
  - prouver que pour tout $r \in]R, +\infty[$, $(a_n r^n)_{\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 ou que, pour tout $r \in]R, +\infty[$, $\sum a_n r^n$ diverge.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2, 3

✔ **Si l'on veut** traduire que $R < \rho\left(\sum a_n z^n\right)$, $R \in \mathbb{R}_+$

- **on peut** écrire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $R < \lambda$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \lambda^n = 0$ (ou $\sum a_n \lambda^n$ converge).

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

✔ **Si l'on veut** montrer que $\rho\left(\sum a_n z^n\right) = \rho\left(\sum b_n z^n\right)$,

- **on peut**
  - montrer les deux implications :

    (1) $\quad |z| < \rho\left(\sum a_n z^n\right) \Rightarrow \sum b_n z^n$ converge

    (2) $\quad |z| < \rho\left(\sum b_n z^n\right) \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge
  - montrer les deux implications :

    (1) $\quad |z| < \rho\left(\sum a_n z^n\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n z^n = 0$

    (2) $\quad |z| < \rho\left(\sum b_n z^n\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$
  - observer quand c'est le cas que l'une des deux séries est (éventuellement à un coefficient non nul près) la série des dérivées $p^{\text{ième}}$ $(p \geq 1)$ de l'autre.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

II. Développement en série entière

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une fonction est développable en série entière,

- **on peut** penser à évaluer le reste d'ordre n de la série de Taylor au moyen de la formule de Taylor avec reste intégral.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 5

✔ **Si l'on veut** calculer le développement en série entière d'une fonction f,

• **on peut** • essayer d'écrire f comme combinaison linéaire (ou éventuellement produit) de fonctions dont les développements sont connus. Un cas favorable est celui des fractions rationnelles pour lesquelles une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ permet d'atteindre ce but.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 6, 7

• Examiner si la dérivée (ou une dérivée d'ordre supérieur) est facilement développable. Ce sera, en particulier, le cas si cette dérivée est une fraction rationnelle.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 8, 9

• en ultime recours, utiliser la méthode de l'équation différentielle.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 10

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une fonction f est de classe C^{∞} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

• **on peut** tenter de trouver une série entière dont la somme coïncide avec f sur I.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 11

III. Sommation des séries entières

✔ **Si l'on veut** après avoir vérifié que le rayon de convergence ρ est non nul, calculer une somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

• **on peut** • tenter de retrouver des développements usuels au besoin en effectuant des manipulations sur le coefficient a_n et la variable x :

• observer que a_n est

– le coefficient d'ordre n d'un développement connu,

– combinaison linéaire des coefficients d'ordre n de développements connus,

– le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy de développements connus,

• factoriser une puissance de x

• effectuer un changement de variable du type $x = t^p$ avec $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$;

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 12

• en utilisant une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$, trouver une équation différentielle dont S est solution sur $]-\rho, \rho[$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 13

✔ **Si l'on veut** sachant qu'elle est convergente, calculer la somme d'une série numérique $\sum b_n$

• **on peut** penser à introduire une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ pour laquelle il existe x_0 appartenant au domaine de convergence tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = a_n x_0^n$

• si $|x_0| < \rho$, on conclut en calculant la fonction somme S sur $]-\rho, \rho[$: $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = S(x_0)$

• si $|x_0| = \rho$, dans le cas où x_0 est réel, on montre que la série entière est uniformément convergente sur $[0, x_0]$. Alors le calcul de $S(x)$ pour $|x| < \rho$ permet de conclure au prix d'un passage à la limite : $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lim_{x \to x_0} S(x)$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 14

Mise en œuvre

I. Rayon de convergence

Ex. 1

On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon $\rho > 0$.

Montrer que $\sum \dfrac{a_n z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Indications

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, écrire $\left|\dfrac{a_n z^n}{n!}\right|$ en fonction de $|a_n| \left(\dfrac{\rho}{2}\right)^n$.

Solution

Posons $R = \dfrac{\rho}{2}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| R^n = 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $r = |z|$, écrivons $\left|\dfrac{a_n z^n}{n!}\right| = |a_n| R^n \dfrac{r^n}{R^n n!}$.

Puisque $\dfrac{r^n}{R^n n!}$ est, d'après la règle de d'Alembert, le terme général d'une série convergente, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{r^n}{R^n n!} = 0$ et en conséquence :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n z^n}{n!} = 0.$$

Le rayon de convergence de $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ est donc $+\infty$.

Commentaires

Remarquer que $\rho>0$ donne $R<\rho$.

C'est le terme général du développement de $e^{\frac{r}{R}}$.

On peut aussi écrire que :

$$\frac{a_n}{n!} = O\left(\frac{1}{R^n n!}\right)$$

et conclure avec le corollaire du théorème 4.

Ex. 2

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$.

Soit ρ, ρ_1, ρ_2 les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum \alpha_n x^n$, et $\sum \beta_n x^n$.

Montrer que $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$.

Indications

Montrer que $r < \min(\rho_1, \rho_2) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$,

et que $r < \rho \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n r^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n r^n = 0$.

Solution

Supposons $\min(\rho_1, \rho_2) > 0$.

Pour $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < \min(\rho_1, \rho_2)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n r^n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \beta_n r^n = 0, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0.$$

Il en résulte que $r \leq \rho$.

Commentaires

$\rho = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \,/\, \lim a_n r^n = 0\}$.

On a ainsi prouvé que $[0, \min(\rho_1, \rho_2)[\subset[0, \rho]$ donc que :

$$\min(\rho_1, \rho_2) \leqslant \rho \qquad \textbf{(1)}.$$

Remarquons enfin que cette inégalité reste vraie dans le cas où :

$$\min(\rho_1, \rho_2) = 0.$$

Supposons maintenant que $\rho > 0$.

Pour $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < \rho$, on a $\lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n r^n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \beta_n r^n = 0.$$

On considère les parties réelle et imaginaire de $a_n r^n$.

On en déduit $r \leqslant \rho_1$ et $r \leqslant \rho_2$ donc $r \leqslant \min(\rho_1, \rho_2)$.

On a ainsi prouvé que $[0, \rho[\subset[0, \min(\rho_1, \rho_2)]$, donc que :

$$\rho \leqslant \min(\rho_1, \rho_2) \qquad \textbf{(2)}.$$

Comme précédemment cette inégalité reste vraie lorsque $\rho = 0$.

Finalement **(1)** et **(2)** donnent $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$.

Ex. 3

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Comparer les rayons de convergence ρ_1 et ρ_2 des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n^2 z^n$.

Indications

Montrer que $\rho_1^2 \leqslant \rho_2$ et que $\rho_2 \leqslant \rho_1^2$.

Solution

Supposons $\rho_1 > 0$.

Pour $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < \rho_1^2$, on a $\sqrt{r} < \rho_1$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n r^{\frac{n}{2}} = 0$.

Il en résulte $\lim_{n\to+\infty} a_n^2 r^n = 0$ et donc $r \leqslant \rho_2$.

Ceci prouve que $\rho_1^2 \leqslant \rho_2 \qquad$ **(1)**.

Commentaires : Car on a montré que $[0, \rho_1^2[\subset[0, \rho_2]$.

On remarque de plus que l'inégalité **(1)** reste vraie dans le cas où $\rho_1 = 0$.

Supposons maintenant $\rho_2 > 0$.

Pour $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < \sqrt{\rho_2}$, on a $r^2 < \rho_2$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n^2 r^{2n} = 0$.

Il en résulte $\lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$ et donc $r \leqslant \rho_1$.

Ceci prouve que $\sqrt{\rho_2} \leqslant \rho_1$ c'est-à-dire aussi $\rho_2 \leqslant \rho_1^2 \qquad$ **(2)**.

Comme précédemment, on remarque que l'inégalité **(2)** reste vraie lorsque :

$$\rho_2 = 0.$$

Avec **(1)** et **(2)**, on conclut que $\rho_2 = \rho_1^2$.

Ex. 4

Étant donnés une suite complexe $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et un réel α, montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n e^{\sqrt{n}\,\alpha} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Indications

Montrer que les rayons de convergence ρ_1 et ρ_2 vérifient $\rho_1 \leqslant \rho_2$ et $\rho_2 \leqslant \rho_1$.

Solution

Soit ρ_1 le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et ρ_2 celui de $\sum a_n e^{\sqrt{n}\,\alpha} z^n$.

Commentaires : C'est le corollaire du théorème 4.

L'inégalité $|a_n| \leqslant |a_n| e^{\sqrt{n}\,\alpha}$ donne $\rho_1 \geqslant \rho_2 \qquad$ **(1)**.

Remarquons que si $\rho_1 = 0$, d'après **(1)** on a $\rho_2 = \rho_1 = 0$.
Supposons maintenant $\rho_1 > 0$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho_1$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|z| < \lambda < \rho_1$.

Écrivons alors $|a_n|\, e^{\ln^\alpha n}\, |z|^n = |a_n|\, \lambda^n \cdot e^{\ln^\alpha n} \left(\dfrac{|z|}{\lambda}\right)^n$ et posons :

$$v_n = e^{\ln^\alpha n} \left|\frac{z}{\lambda}\right|^n.$$

Avec $\left|\dfrac{z}{\lambda}\right| < 1$ et $n^2 v_n = e^{n \ln\left|\frac{z}{\lambda}\right| + \ln^\alpha n + 2 \ln n} = e^{n \ln\left|\frac{z}{\lambda}\right| + o(n)}$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 v_n = 0$, donc la série numérique $\sum v_n$ converge d'après la règle de Riemann et son terme général tend vers 0.

Puisque $\lambda < \rho_1$, on a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \lambda^n = 0$ et finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n|\, e^{\ln^\alpha n}\, |z|^n = 0 \text{ donc } |z| \leqslant \rho_2.$$

On a ainsi prouvé que $|z| < \rho_1 \;\Rightarrow\; |z| \leqslant \rho_2$ donc $\rho_1 \leqslant \rho_2$ **(2)**.
En conclusion, les inégalités **(1)** et **(2)** donnent $\rho_1 = \rho_2$.

La convergence de $\sum v_n$ peut aussi s'obtenir avec la règle de d'Alembert. En effet, un développement limité donne :
$\ln^\alpha(n+1) - \ln^\alpha n = \dfrac{\alpha \ln^{\alpha-1} n}{n} + o\left(\dfrac{\ln^{\alpha-1} n}{n}\right)$,
donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left|\dfrac{z}{\lambda}\right| \exp\left(\dfrac{\alpha \ln^{\alpha-1} n}{n} + o\left(\dfrac{\ln^{\alpha-1} n}{n}\right)\right)$
tend vers $\left|\dfrac{z}{\lambda}\right| < 1$ quand n tend vers $+\infty$.

II. Développement en série entière

Ex. 5

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1) Montrer que s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-a, a[, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| a^n \leqslant b\, n!$

alors f est développable en série entière à l'origine.

2) Montrer que si f et toutes ses dérivées sont positives, f est développable en série entière de rayon de convergence infini.

Indications

1) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0, x]$ pour $x \in]-a, a[$.

2) Pour tout $a > 0$ et tout $x \in]-a, a[$, utiliser la formule de Taylor avec reste intégral sur $[x, x + a]$.

Solution

1) D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc, pour $x \in]-a, a[$, on obtient :

$$|R_n(x)| \leqslant b \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t \right|$$

c'est-à-dire $\qquad |R-n(x)| \leqslant b \left|\dfrac{x}{a}\right|^{n+1}.$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{x}{a}\right|^{n+1} = 0$, on en déduit que f coïncide sur $]-a, a[$ avec la somme de sa série de Mac Laurin.

2) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et x réel quelconque, écrivons la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x+a) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} a^k + \int_x^{a+x} \frac{(a+x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Commentaires

La fonction $t \mapsto (x-t)^n$ étant de signe constant sur $[0, x]$, on a :
$\left|\int_0^x |x-t|^n \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^x (x-t)^n \mathrm{d}t\right|$.

Puisque f est positive sur $\mathbb{R}$ ainsi que toutes ses dérivées, il en résulte :

$$f(x+a) \geq \frac{f^{(n)}(x)}{n!}a^n.$$

Alors, en posant $b = \|f\|_\infty^{[0,2a]}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-a, a[, \quad 0 \leq f^{(n)}(x)a^n \leq b\, n!\,.$$

La première question montre que f coïncide sur sur $]-a, a[$ avec la somme de sa série de Mac Laurin donc, puisque a est quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$, le rayon de convergence de ce développement en série entière est infini.

ce qui a un sens puisque f est continue sur le compact $[0,2a]$.

Ex. 6

Déterminer le développement en série entière à l'origine de $\quad f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \ell n(1 + x - 2x^2)$.

Indications

Factoriser $1 + x - 2x^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution

On a $1 + x - 2x^2 = (1-x)(1+2x)$, donc f est définie sur $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[= I$ et, $\forall x \in I, \quad f(x) = \ell n(1-x) + \ell n(1+2x)$.

Du développement connu de $x \mapsto \ell n(1+x)$, on déduit :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ell n(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1)$$

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \ell n(1+2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n} \quad (\rho = \frac{1}{2})$$

donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n - 1}{n}x^n \quad (\rho = \frac{1}{2})$

Commentaires

Noter que le rayon de la série somme est ici $\frac{1}{2} = \inf\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ car les deux séries initiales ont des rayons différents : $\frac{1}{2}$ et 1.

Ex. 7

Déterminer le développement en série entière à l'origine de $\quad f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x$.

Indications

Décomposer f en somme d'exponentielles.

Solution

Pour tout x réel, on a $f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}\right)$.

Sachant que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(1+i)^n + (1-i)^n + (-1)^n(1-i)^n + (-1)^n(1+i)^n\right]\frac{x^n}{n!}.$$

D'où $4f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}} + (-1)^n e^{-in\frac{\pi}{4}} + (-1)^n e^{in\frac{\pi}{4}}\right)\frac{x^n}{n!}$.

Commentaires

$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$.

$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

puis $2f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[2^n e^{in\frac{\pi}{2}}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + 2^n e^{-in\frac{\pi}{2}}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

Finalement il vient $\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{4n}}{(4n)!}$.

Ce calcul étant valable quel que soit le réel x, le rayon de convergence est $+\infty$.

$\frac{1}{2}\left(e^{in\frac{\pi}{2}}+e^{-in\frac{\pi}{2}}\right)=\cos n\frac{\pi}{2}$
$=0$ si $n=2p+1$
$=(-1)^p$ si $n=2p$.

Ex. 8

Déterminer le développement en série entière en 2 de la fonction $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \text{Arctan}\,\frac{2(x+1)}{x-4}$.

Indications

Considérer la fonction $g\ :\ t\mapsto f(t+2)$ dont la dérivée est une fraction rationnelle.

Solution

Posons $g(t) = f(t+2) = \text{Arctan}\,\frac{2(t+3)}{t-2}$.

Cette fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $g'(t) = \frac{-2}{(t+2)^2+4}$.

Une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ donne :

$$g'(t) = \frac{-i/2}{t+2(1+i)} + \frac{i/2}{t+2(1-i)}$$

donc
$$g'(t) = \frac{1}{4i\sqrt{2}}\left[\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{1+\frac{t}{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}} - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+\frac{t}{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right].$$

On en déduit que pour tout t réel tel que $|t| < 2\sqrt{2}$,

$g'(t) =$

$$\frac{1}{4i\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^{\frac{3n}{2}}}e^{-in\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4i\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^{\frac{3n}{2}}}e^{in\frac{\pi}{4}}$$

donc $\quad g'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}t^n 2^{-\frac{3(n+1)}{2}}\sin(n+1)\frac{\pi}{4}$.

Remarquons que, puisque l'on a additionné deux séries entières de même rayon de convergence égal à $2\sqrt{2}$, le rayon ρ du développement de g' est a priori supérieur ou égal à $2\sqrt{2}$.

En notant de plus que, pour $t = 2\sqrt{2}$, la série est grossièrement divergente, on obtient $\rho \leqslant 2\sqrt{2}$ et finalement $\rho = 2\sqrt{2}$.

Le théorème d'intégration terme à terme d'une série entière donne ensuite : $\forall t\in]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$,

$$g(t) = f(2) + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{n+1}2^{-\frac{3(n+1)}{2}}\sin(n+1)\frac{\pi}{4},$$

donc $\quad \forall x\in]2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}[$,

$$f(x) = -\text{Arctan}\,3 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{n}2^{-\frac{3n}{2}}\sin n\frac{\pi}{4}.$$

Commentaires

$2(1+i)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$2(1-i)=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Les factorisations ont pour but de faire apparaître des sommes de séries géométriques.

On sait que pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$,
on a : $\qquad \frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$.

$\frac{e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}}-e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}}}{2i}=\sin(n+1)\frac{\pi}{4}$.

On sait que lors d'une intégration le rayon de convergence est inchangé.

Ex. 9

Déterminer le développement en série entière à l'origine de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{Arcsin} x.$

Indications

Le développement de la dérivée se déduit de celui de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$.

Solution

Le développement de $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$ s'écrit :

$$\forall u \in]-1,1[,\quad \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times 2n-1}{2^n} \frac{u^n}{n!}$$

ou encore $\quad \forall u \in]-1,1[,\quad \dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n.$

On en déduit $\quad \forall x \in]-1,1[,\quad \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$

Par application du théorème d'intégration terme à terme des série entières, on en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad \operatorname{Arcsin} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Commentaires

série entière de rayon de convergence $\rho = 1$.

et on sait que le rayon de convergence est encore $\rho = 1$.

Ex. 10

Déterminer le développement en série entière à l'origine de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\operatorname{Arcsin} x)^2.$

Indications

Développer f' par la méthode de l'équation différentielle puis en déduire le développement de f au moyen d'une intégration.

Solution

f est de classe C^{∞} sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = 2g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nous allons développer g par la méthode de l'équation différentielle.
On a :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad g'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Donc g est l'unique solution sur $]-1,1[$ de :

$$(E) : (1-x^2)y' - xy = 1,$$

vérifiant la condition $y(0) = 0$.

Commentaires

On remarque tout d'abord que f est de classe C^{∞} sur $]-1,1[$.

On a vu en Première année que puisque les coefficients
$a : x \mapsto 1 - x^2$
$b : x \mapsto -x$ et
$c : x \mapsto 1$,
sont continus sur $]-1,1[$ et que a ne s'annule pas sur cet intervalle,
pour tout $(x_0, y_0) \in]-1,1[\times \mathbb{R}$, il existe une solution et une seule de (E) sur I vérifiant la condition $y(x_0) = y_0$.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $\rho > 0$ et de somme S.
Pour que S soit solution de (E) sur $]-\rho,\rho[$ et vérifie $S(0)=0$, il faut et il suffit que :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-\rho,\rho[,\quad (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1,$$

c'est-à-dire $\quad a_0 = 0 \quad$ et :

$$\forall x \in]-\rho,\rho[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^{n+1} = 1,$$

soit aussi $\quad a_0 = 0,\quad a_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 1, (n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} = 0.$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle.

La relation $\quad \forall n \geqslant 1,\quad (n+1)a_{n+1} = n a_{n-1}$:

- avec $a_0 = 0$ donne $\quad \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0$
- avec $a_1 = 1$ donne :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = \frac{2 \times \cdots \times 2p}{3 \times 5 \times \cdots \times 2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

- enfin, donne $\dfrac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = \dfrac{2p}{2p+1}$ donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = 1$

et le rayon de convergence de $\sum \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}$ est $\rho = 1$.

Ainsi, il existe une série entière et une seule de rayon non nul et dont la somme vérifie $S(0) = 0$ et est solution de (E) sur l'intervalle ouvert de convergence.

Dès que l'on a vérifié que ρ est non nul, les équivalences précédentes montrent que la série obtenue est bien solution du problème.

Il s'agit de $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1} \quad (\rho = 1).$

On en déduit alors $\quad \forall x \in]-1,1[,\quad g(x) = S(x) \quad$ et par intégration :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad (\operatorname{Arcsin} x)^2 = 2\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+2)!}x^{2p+2} \quad (\rho = 1)$$

Ex. 11

Soit $f :]-\pi,0[\cup]0,\pi[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2) Soit g ce prolongement, montrer que g est de classe C^∞ sur $]-\pi,\pi[$.

Indications

Montrer que g s'écrit comme le quotient de deux fonctions de classe C^∞ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\pi,\pi[$.

Solution

1) Au voisinage de 0, $f(x) \sim \dfrac{x}{6}$, on pose donc $g(0) = 0$.

Commentaires

$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$ et $x \sin x \sim x^2$

2) ▪ Soit u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \frac{x - \sin x}{x^2} \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } u(0) = 0.$$

u est développable en série entière de rayon $\rho = +\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!},$$

elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

▪ Soit v définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad v(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad$ pour $x \neq 0$ et $v(0) = 1$.

v est développable en série entière de rayon $\rho = +\infty$:

$\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$, elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a $\quad v(x) \neq 0$, donc $g = \dfrac{u}{v}$ est également de classe C^∞ sur $]-\pi, \pi[$.

En divisant numérateur et dénominateur par x^2, on fait apparaître un nouveau dénominateur qui ne s'annule plus sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

D'autre part, ces fonctions sont de classe C^∞ puisque développables en séries entières.

III. Sommation des séries entières

Ex. 12

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n+4} \frac{x^n}{n!}$.

Indications

La fraction $\dfrac{x^n}{(n+4)n!}$ est la dérivée troisième de $\dfrac{x^{n+3}}{(n+4)!}$.

Solution

Pour $n \geqslant 1$, posons $\quad a_n = \dfrac{n^2 + 4n - 1}{(n+4)n!}$ et $u_n(x) = a_n x^n$.

Quand n tend vers $+\infty$, on a $a_n \sim \dfrac{1}{(n-1)!}$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ et le rayon de convergence est $\quad \rho = +\infty$.

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!} - \frac{x^n}{(n+4)n!} = \frac{x^n}{(n-1)!} - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{x^{n+3}}{(n+4)!}\right).$$

On en déduit

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n+4} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \frac{d^3}{dx^3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+4)!}\right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x\, e^x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+4)!} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}\right)$$

$$= \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24}$$

d'où $\displaystyle\frac{d^3}{dx^3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+4)!}\right) = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right) + \frac{6}{x^4} - \frac{1}{4}$.

Commentaires

Même si ce n'est pas demandé explicitement dans l'énoncé, il faut commencer par préciser le rayon de convergence.

Toutes les séries écrites ont un rayon de convergence infini.

Dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Finalement $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*, S(x) = e^x \left(x - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{6}{x^4} \right) - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{4}$

et, d'autre part, $\quad S(0) = 0$.

Avec un développement limité d'ordre 4 de $x \mapsto e^x$, on vérifie que S est continue en 0.

Ex. 13

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière de la variable réelle x :

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot (2n+1)} x^{2n+1}.$$

Montrer que la fonction somme f est solution d'une équation différentielle du premier ordre. En déduire une expression explicite de f.

Indications

Déduire l'équation différentielle de la relation de récurrence liant deux coefficients consécutifs de la série.

Solution

Posons $\quad a_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ (2n+1)}$.

De $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3}$ on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} \right| = \frac{x^2}{2}$ et $\rho = \sqrt{2}$.

Pour $x \in] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \quad \text{et} \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n},$$

et la relation $(2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_n$, $\ n \geqslant 0$, donne successivement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+3) a_{n+1} x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n x^{2n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} = \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} + \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

$$f'(x) - 1 = \frac{x^2}{2} f'(x) + \frac{x}{2} f(x)$$

d'où $\quad (x^2 - 2) f'(x) + x f(x) + 2 = 0$.

f apparaît comme l'unique solution sur $I =] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad (x^2 - 2) y' + xy + 2 = 0 \quad \text{vérifiant } y(0) = 0.$$

La méthode de variation de la constante conduit à la solution générale sur I :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} \left[2 \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \mu \right]$$

et la condition $f(0) = 0$ donne :

$$\forall x \in] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[, \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{2 - x^2}} \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Commentaires

Attention ! la série est lacunaire (pas de termes pairs), le théorème 5 ne s'applique pas. Dans cette situation, on revient à l'utilisation directe du critère de d'Alembert.

L'équation homogène associée :
$(H)\ (x^2 - 2) y' + xy = 0$
a pour solution générale sur I :
$x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{2 - x^2}}$.

Ex. 14

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Indications

Calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ et montrer que la fonction S ainsi introduite est continue au point 1.

Solution

On a affaire à une série alternée convergente d'après le critère de Leibniz

- Introduisons la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

On établit facilement avec le critère de d'Alembert que son rayon est $\rho = 1$.

Pour tout $x \in [0, 1]$, $\sum u_n(x)$ est une série alternée vérifiant le critère de Leibniz. En posant $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$, on sait que, dans ces conditions, on a :

$$|R_n(x)| \leqslant |u_n(x)|.$$

Il en résulte $\| R_n \|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{4n+1}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \| R_n \|_\infty^{[0,1]} = 0$ et cette série converge uniformément sur $[0, 1]$.

La somme S est donc continue sur $[0, 1]$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

c'est-à-dire :

$$S(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} S(x).$$

- Pour $x \in]-1, 1[$, on a :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{4n}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{4n}\,\mathrm{d}t$$

donc $S(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

- La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1+t^4}$ s'écrit :

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

Commentaires

La suite $\left(\frac{1}{4n+1}\right)$ décroît et tend vers 0.

Avec $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = x^4$.

Ceci reste vrai sur $[-1, 0]$, mais c'est inutile dans le contexte.

L'application du théorème **10** nécessite $|x| < 1$.

En posant $t = -u$, on obtient

Cette remarque permet de réduire le calcul à une seule primitivation.

$$\int_0^1 \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\mathrm{d}t = \int_0^{-1} \frac{u+\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}\mathrm{d}u, \text{ d'où :}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^1 \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-1}^1 \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ell n\left(t^2+t\sqrt{2}+1\right)\right]_{-1}^1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\mathrm{Arctan}(t\sqrt{2}+1)\right]_{-1}^1$$

On a utilisé $\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ qui donne aussi : $\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}+1)+\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}-1)=\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ell n\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}+1)+\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}-1)\right]$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ell n(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

D'où, finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ell n(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$

Exercices

Niveau 1

Rayon de convergence

Ex. 1

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière de la variable réelle $\Sigma a_n x^n$ puis étudier le comportement de cette série aux bornes de l'intervalle de convergence :

1) $a_n = \operatorname{Arctan} n^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$;

2) $a_n = \ln \dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geqslant 2$;

3) $a_n = \dfrac{1}{\ln n!}$;

4) a_n est le nombre de diviseurs de n, $n \geqslant 1$;

5) $a_n = \dfrac{\cos n}{n^n}$.

Ex. 2

Montrer que $\sum a_n z_n$ et $\sum a_n \dfrac{nz^n}{n^2+n-2}$ ont même rayon de convergence.

Ex. 3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Que peut-on dire du rayon de convergence ρ' de la série entière $\sum a_n^\alpha z^n$, $(\alpha \in \mathbb{R})$?

Ex. 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$,

que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum S_n z^n$?

Développement en série entière

Ex. 5

Développer en série entière à l'origine la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la donnée de $f(x)$:

1) $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{1+x}\right)$;

2) $f(x) = \ln\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)$;

3) $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ex. 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière de rayon $R > 1$ à l'origine et telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Montrer que f est nulle sur $]-R, R[$.

Ex. 7

Calculer, à 10^{-6} près, $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^5}}$.

Ex. 8

Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t - x\sin t)}\,\mathrm{d}t$ est à valeurs réelles.

Développer f en série entière à l'origine.

Sommation des séries entières

Ex. 9

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, puis exprimer $f(x)$ au moyen des fonctions usuelles.

1) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$;

2) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$;

3) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$;

4) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$;

5) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \operatorname{ch} 1 + \operatorname{ch} 2 + \dots + \operatorname{ch} n) x^n$.

Ex. 10

Établir l'existence et calculer la somme S :

1) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+2)2^n}$;

2) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$;

3) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Ex. 11

Résoudre l'équation : $\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2x^n = 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

Ex. 12

Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=01}^{+\infty}(-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

2) Au moyen d'une équation différentielle, calculer f sur l'intervalle ouvert de convergence

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 13

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle $\Sigma a_n x^n$ avec :

$$a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x.$$

2) Étudier la nature de cette série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Ex. 14

Deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont pour rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Que peut-on dire du rayon de convergence R de la série $\sum a_n b_n z^n$?

Ex. 15

Soit $a \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. La série de fonctions de terme général :

$$u_n : x \mapsto \sin(a^n x)$$

est-elle uniformément convergente sur cet ensemble ?

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est développable en série entière à l'origine.

Ex. 16

On considère la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) Étudier les séries numériques :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n.$$

2) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n.$$

Ex. 17

On considère la suite réelle $(a_n)_{\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1 \quad \text{et}$$

$$\forall n \geqslant 2, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)} \quad (\mathfrak{R}).$$

1) Étudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$?

2) Trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction f somme de la série entière. En déduire f.

Ex. 18

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

Calculer u_n en fonction de n.

Avec éléments de solution

Ex. 19

Développer en série entière à l'origine la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Ex. 20

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arcsin} x\right)$.

1) Développer f en série entière à l'origine.

2) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{3n}^n \left(\frac{2}{27}\right)^n$.

Ex. 21

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ avec :

$$|q| < 1, \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \ f(x) = (1 - qx)f(qx).$$

Montrer que f est développable en série entière à l'origine.

Ex. 22

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n + n^2 ix}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que le développement en série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence nul.

Ex. 23

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x + n}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2, +\infty[$.

3) Montrer que f est développable en série entière à l'origine.

Ex. 24

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = \alpha \ \text{ et } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2u_n - n^2.$$

Trouver les réels α tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0$.

Ex. 25

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

On considère la série entière $\Sigma u_n x^n, \ x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que son rayon de convergence R est minoré par $\dfrac{1}{2}$.

2) Calculer sa somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et en déduire une expression de u_n.

Ex. 26

Un dérangement de $\mathcal{S}_n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ est une permutation de $[\![1, n]\!]$ qui n'a aucun point fixe.

1) Pour $n \geqslant 1$, soit a_n le nombre de dérangements de $\mathcal{S}_n$ et par convention $a_0 = 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{n-k}$.

2) Calculer a_n en considérant la série entière $\Sigma a_n \dfrac{x^n}{n!}$.

Ex. 27

1) Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}, \quad n \geqslant 0$.

2) Mêmes questions pour la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$.

Ex. 28

1) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{9} \leqslant (1+x)^{\frac{2}{3}} - 1 \leqslant \frac{2}{3}x.$$

2) Calculer la partie entière de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{10^7 - 1} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$.

Ex. 29

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln n$.

Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Ex. 30

Existe-t-il $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \ e^{f(z)} = z \ ?$$

Niveau 3

Avec solution détaillée

Ex. 31

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a, a[, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[, f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Montrer que :

$$\forall x \in]-a, a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Ex. 32

1) Montrer que la fonction :

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$$

est l'unique solution sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$.

2) En déduire que f est développable en série entière à l'origine.

Ex. 33

Soit $(b_n)_{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\sum b_n$ diverge et telle que la série entière de la variable réelle x, $\sum b_n x^n$ ait 1 pour rayon de convergence.

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = S \in \mathbb{R}$.

1) On note : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = S$.

2) Application : soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer l'existence dans $\mathbb{R}_+^*$ de :
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1} x^n.$$

Avec éléments de solution

Ex. 34

Soit $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1-\operatorname{sh} x}$.

1) Étudier les variations de f.

2) Montrer que f admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre.

3) Montrer que f est développable en série entière autour de l'origine avec un rayon de convergence $R = \ln(1+\sqrt{2})$.

Ex. 35

Soit q réel tel que $-1 < q < 1$ et (E) l'équation :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x f(qx),\ f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

1) Montrer que toute solution de (E) est développable en série entière.

2) Résoudre (E).

Ex. 36

On donne l'équation fonctionnelle :
$$(E)\ :\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(2x) = -2\sin x f(x).$$

1) Trouver une solution particulière.

2) Calculer $f^k(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3) Trouver toutes les solutions de (E).

Indications

Ex. 13

Un encadrement de $|a_n|$ donne le rayon de convergence mais aussi la décroissance de $(|a_n|)_{\mathbb{N}}$.

Ex. 14

Tout $r < R_1 R_2$ s'écrit $r = r_1 r_2$ avec $r_1 < R_1$ et $r_2 < R_2$.

Ex. 15

3) Majorer $\left|f^{(n+1)}\right|$ pour en déduire que le reste intégral de la formule de Taylor tend vers 0.

Ex. 16

1) Pour tous réels a et b, $a^2 + b^2 \geq 2\,|ab|$.

2) Justifier l'intégration terme à terme.

Ex. 17

1) Opérer par récurrence.

Ex. 18

Introduire $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Montrer que $f(x)$ est solution d'une équation du second degré.

Ex. 19

Méthode de l'équation différentielle.

Ex. 20

Méthode de l'équation différentielle.

Ex. 21

Montrer que quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe une solution et une seule de (1) telle que $f(0) = \lambda$, puis rechercher une série entière dont la somme S vérifie (1) et $S(0) = f(0)$. Observer l'analogie avec la méthode de l'équation différentielle.

Ex. 22

Minorer $\left|f^{(p)}(0)\right|$ par le terme de rang p de la série dont ce réel est la somme.

Ex. 23

Écrire $f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + g(x)$ puis majorer les dérivées de g sur $]-2, +\infty[$ pour en déduire, au moyen d'une formule de Taylor, que g est développable en série entière de rayon de convergence $R \geqslant 2$.

Ex. 24

Écrire $\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{u_n}{2^n} - \frac{n^2}{2^{n+1}}$.

Ex. 25

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$, puis que la somme est une fonction rationnelle.

Ex. 26

1) Dénombrer les permutations ayant k points fixes donnés, puis celles qui ont p points fixes quelconques.

2) Reconnaître un produit de Cauchy.

Ex. 27

1) Introduire la série entière $\sum u_n x^{2n+1}$.

2) Observer que Σv_n est un produit de Cauchy mais que le théorème donnant la somme de la série produit ne s'applique pas.

Introduire alors la série entière $\Sigma v_n x^{2(n+1)}$.

Ex. 28

1) Utiliser un développement en série entière.

2) Déduire du 1) un encadrement de $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$, additionner ces inégalités membre à membre puis majorer $\sum_{k=1}^{10^7-1} \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}}$ au moyen d'une intégrale.

Ex. 29

Observer que $(x-1)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ell n\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^n$ et que, pour $n \geqslant 2$, $-\frac{1}{n+1} \leqslant \ell n \frac{n-1}{n} \leqslant -\frac{1}{n}$.

Ex. 30

Si f est solution, considérer $f(\mathrm{U})$ où $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Ex. 31

Écrire la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Pour $x \in]0, a[$, la suite $(S_n(x))$ est croissante majorée.

Établir alors que pour $0 < x < y < a$:

$0 \leqslant \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$, puis en déduire $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$

Ex. 32

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, la série de Mac Laurin de f est à termes positifs.

Vérifier que la somme de cette série est solution de :

$$y' = 1 + y^2 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ex. 33

1) Montrer que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = +\infty$

2) Développer en série entière $x \mapsto (1-x)^{-n}$ et appliquer le 1).

Ex. 34

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \ell n(1+\sqrt{2})[,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Considérer le développement limité d'ordre n de :

$$x \mapsto f(x)(1 - \operatorname{sh} x)$$

pour prouver que f est somme de sa série de Mac Laurin.

Ex. 35

Introduire la fonction g telle que $f(x) = e^{\frac{x}{1-a}} g(x)$ et majorer $\| g^{(n)} \|_\infty^{[-x,x]}$ pour en déduire, au moyen d'une fonction de Taylor, que g est développable en série entière.

Ex. 36

1) Une solution particulière est $x \mapsto \cos x$.

2) Utiliser la formule de Leibniz.

3) Majorer $\| f^{(n)} \|_\infty^{[-a,a]}$ par récurrence pour en déduire, au moyen d'une formule de Taylor, que toute solution de (E) est développable en série entière.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) ▪ Rayon de convergence

Pour $\alpha \geqslant 0$, on a $\frac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{Arctan} n^\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc $a_n = \mathcal{O}(1)$ et $1 = \mathcal{O}(a_n)$.

Sachant que le rayon de convergence de $\sum x^n$ est égal à 1, le corollaire du théorème 4 donne alors $\rho \geqslant 1$ et $1 \geqslant \rho$.

Donc, lorsque $\alpha \geqslant 0$, on obtient $\rho = 1$.

Pour $\alpha < 0$, $\operatorname{Arctan} n^\alpha \sim n^\alpha$, donc les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n^\alpha x^n$ ont même rayon de convergence et on a encore $\rho = 1$.

▪ Étude aux bornes

Posons $u_n(x) = \left(\operatorname{Arctan} n^\alpha\right) x^n$.

Pour $|x| = 1$, la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente lorsque $\alpha \geqslant 0$ et absolument convergente lorsque $\alpha < -1$ car on a alors $|u_n(x)| \sim n^\alpha$ et $\sum n^\alpha$ est une série de Riemann convergente.

Lorsque $\alpha \in [-1, 0[$, la série $\sum u_n(1)$ est à termes positifs divergente car $u_n(1) \sim n^\alpha$ et $\sum u_n(-1)$ est alternée convergente d'après le critère de Leibniz car $\operatorname{Arctan} n^\alpha$ tend vers 0 en décroissant.

Conclusion. L'ensemble de convergence de $\sum \left(\operatorname{Arctan} n^\alpha\right) x^n$ est : $\begin{cases}]-1, 1[& \text{si} \quad \alpha \geqslant 0 \\ [-1, 1[& \text{si} \quad -1 \leqslant \alpha < 0 \\ [-1, 1] & \text{si} \quad \alpha < -1 \end{cases}$

2) ▪ Rayon de convergence

De $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, on déduit $\rho \geqslant 1$.

Effectuons alors un développement de a_n lorsque n tend vers $+\infty$:

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit $a_n(-1)^n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum a_n(-1)^n$ diverge ce qui donne $\rho \leqslant 1$. Finalement on a $\rho = 1$.

▪ Étude aux bornes

Il reste à étudier $\sum a_n$.

Le développement précédent donne $a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ donc, d'après le critère des équivalents pour les séries de signe constant à partir d'un certain rang, $\sum \left(a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

Or la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère de Leibniz donc $\sum a_n$ est de même nature que $\sum \left(a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ c'est-à-dire divergente.

Conclusion. L'ensemble de convergence de $\sum \left(\ln \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) x^n$ est $]-1, 1[$.

3) ▪ Rayon de convergence

Remarquons que, pour tout $n \geqslant 2$, $\ln n \leqslant \ln n! \leqslant n \ln n$ donc $\frac{1}{n \ln n} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{\ln n}$ ce qui donne :

$$a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right) \text{ et } \frac{1}{n \ln n} = \mathcal{O}(a_n).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)} = 1$, les séries entières $\sum \frac{x^n}{\ln n}$ et $\sum \frac{x^n}{n\ln n}$ ont le même rayon de convergence égal à 1. Alors avec le corollaire du théorème 4, $a_n = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ donne $\rho \geqslant 1$ et $\frac{1}{n\ln n} = O(a_n)$ donne $1 \geqslant \rho$. Finalement on a $\rho = 1$.

- Étude aux bornes

La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n\ln n}$ est divergente (cf. chapitre 2), donc $a_n \geqslant \frac{1}{n\ln n}$ montre que $\sum a_n$ diverge.

La suite de terme général $\frac{1}{\ln n!}$ est visiblement décroissante et de limite nulle donc $\sum(-1)^n a_n$ converge d'après le critère de Leibniz.

Conclusion. l'ensemble de convergence de $\sum \frac{x^n}{\ln n!}$ est $[-1,1[$.

4) ▪ Rayon de convergence

Il est clair que pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant a_n \leqslant n$. De $a_n \leqslant n$ on déduit que pour $|x| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$ ce qui donne $\rho \geqslant 1$. De même de $1 \leqslant a_n$, on déduit que pour $|x| \geqslant 1$, $a_n x^n$ ne tend pas vers 0 ce qui donne $\rho \leqslant 1$. D'où finalement $\rho = 1$.

Remarque : en montrant que le rayon de convergence de $\sum nx^n$ est égal à 1, on peut aussi conclure avec le corollaire du théorème 4.

- Étude aux bornes

Pour $n = p!$, on a $a_n \geqslant p$. Il en résulte que la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est non bornée et donc que les séries $\sum a_n$ et $\sum(-1)^n a_n$ sont grossièrement divergentes.

Conclusion. L'ensemble de convergence de $\sum a_n x^n$ est $]-1,1[$.

5) ▪ Rayon de convergence

Remarquons que $|a_n| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$. D'autre part, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, si $|x| < 1$ on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = 0$. Donc pour $|x| < 1$, il vient $\lim_{n\to+\infty} a_n x^n$ ce qui donne $\rho \geqslant 1$. Sachant que la suite $(\cos n)_{\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et que pour $|x| > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^n}{n^\alpha} = +\infty$, il vient que pour $|x| > 1$, $a_n x^n$ ne tend pas vers 0. Ceci prouve que $\rho \leqslant 1$. Finalement on a $\rho = 1$.

- Étude aux bornes

Si $\alpha > 1$, les séries $\sum a_n$ et $\sum(-1)^n a_n$ sont absolument convergentes, et si $\alpha \leqslant 0$ elles sont grossièrement divergentes, enfin pour $0 < \alpha \leqslant 1$ elles sont semi-convergentes (voir chapitre 2, Exercice 41)

Ex. 2

Notons ρ_1 et ρ_2 les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n x^n$ et $\sum \frac{na_n x^n}{n^2+n-2}$.

Pour $n \geqslant 2$, on a $\frac{n}{n^2+n-2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$ donc, d'après le corollaire du théorème 4, il vient $\rho_2 \geqslant \rho_1$ **(1)**.

Lorsque $\rho_2 = 0$, l'inégalité précédente donne $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Supposons maintenant $\rho_2 > 0$.

Pour tout réel $r \in [0, \rho_2[$, il existe λ tel que $r < \lambda < \rho_2$. Écrivons alors $a_n r^n = \frac{na_n\lambda^n}{n^2+n-2} \times \frac{n^2+n-2}{n}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^n$.

En posant $u_n = \frac{n^2+n-2}{n}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^n$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{\lambda} < 1$ donc la série $\sum u_n$ converge d'après la règle de d'Alembert et en particulier $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Puisque $\lambda < \rho_2$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} \frac{na_n\lambda^n}{n^2+n-2} = 0$ d'où finalement $\lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$ et $r \leqslant \rho_1$.

On a ainsi montré $[0,\rho_2[\subset[0,\rho_1]$ donc $\rho_2 \leqslant \rho_1$ **(2)**. Avec **(1)** et **(2)** on conclut que $\rho_1 = \rho_2$.

Ex. 3

- Cas où $\alpha > 0$

Pour $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < \rho^\alpha$ on a $0 < r^{\frac{1}{\alpha}} < \rho$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n r^{\frac{n}{\alpha}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n^\alpha r^n = 0$.

Ceci montre que $\rho' = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ / \lim\limits_{n \to +\infty} a_n^\alpha r^n = 0\} \geqslant \rho^\alpha$.

Pour $r > \rho^\alpha$, la suite $\left(a_n r^{\frac{n}{\alpha}}\right)_{\mathbb{N}}$ ne tend pas vers zéro, la suite $\left(a_n^\alpha r^n\right)_{\mathbb{N}}$ non plus. Donc $\rho' \leqslant \rho^\alpha$.

Finalement, $\rho' = \rho^\alpha$. Noter que ce résultat est valable pour $\rho = 0$: $\rho' = 0$ et pour $\rho = +\infty$: $\rho' = +\infty$.

- Cas où $\alpha < 0$

Supposons $\rho > 0$.

Pour $r \in \mathbb{R}$ tel que $r > \rho^\alpha$, on a $r^{\frac{1}{\alpha}} < \rho$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n r^{\frac{n}{\alpha}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n^\alpha r^n = +\infty$.

Ceci montre que $\rho' \leqslant \rho^\alpha$. Voyons sur un exemple que l'inégalité peut être stricte :

$a_{2n} = 2^{2n}$, $a_{2n+1} = \dfrac{1}{2^{2n+1}}$ donne $\rho = \dfrac{1}{2}, \rho^\alpha = 2^{-\alpha}, \rho' = 2^\alpha < \rho^\alpha$.

Le résultat précédent n'est évidemment pas valable pour $\rho = 0$ (0^α n'a pas de sens). Dans ce cas, tout est possible ; exemples :

$a_{2n} = (2n)^{2n}$, $a_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)^{2n+1}}$ donne $\rho = \rho' = 0$,

$a_n = n^n$ donne $\rho = 0$, $\rho' = +\infty$,

$a_{2n} = (2n)^{2n}$, $a_{2n+1} = 1$ donne $\rho = 0$, $\rho' = 1$.

Ex. 4

Notons ρ' le rayon de convergence de $\sum S_n z^n$ et supposons $\rho' > 0$.

Soit alors $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho'$: $\sum\limits_{n \geqslant 0} S_n z^n$ est convergente ainsi que $\sum\limits_{n \geqslant 1} S_{n-1} z^n = z \sum\limits_{n \geqslant 0} S_n z^n$,

donc, en notant que $\forall n \geqslant 1, a_n z^n = S_n z^n - S_{n-1} z^n$, on conclut que $\sum a_n z^n$ converge.

Ceci montre que $\rho \geqslant \rho'$, ce qui est bien sûr encore valable si $\rho' = 0$.

D'après ce qui précède, $\rho = 0$ exige $\rho' = 0$. Supposons maintenant $\rho > 0$.

En observant que $\sum S_n z^n$ n'est autre que le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum z^n$, de rayons respectifs ρ et 1, on obtient $\rho' \geqslant \inf(1, \rho)$ (cf. théorème 6).

En conclusion : on a dans tous les cas $\inf(1, \rho) \leqslant \rho' \leqslant \rho$.

Remarques

1) pour $\rho \leqslant 1$: la formule précédente donne $\rho' = \rho$.

2) pour $\rho > 1$:

- on peut avoir $\rho' = 1$.

Exemple : $a_n = \dfrac{1}{n!}$ alors $\rho = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e$ donc $\rho' = 1$.

- on peut avoir $\rho' = \rho$.

Exemple : $a_{2n} = \dfrac{1}{2^{2n}}$, $a_{2n+1} = -\dfrac{1}{2^{2n}}$ alors $\rho = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} = \dfrac{1}{2^{2n}}$, $S_{2n+1} = 0$ donc $\rho' = 2$.

Ex. 5

1) La fonction f est définie sur $]-1,+\infty[$ car $1+\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et :

pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$.

Pour $|x|<1$, on a : $$f(x)=\ell n\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)=\ell n\left(\frac{1-x^3}{1-x^2}\right)=\ell n(1-x^3)-\ell n(1-x^2).$$

Le développement usuel $\forall u\in]-1,1[\ \ \ell n(1-u)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n}$ donne :

$$\forall x\in]-1,1[\quad f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n}.$$

Soit aussi : $$\forall x\in]-1,1[\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{6n+2}}{3n+1}-\frac{x^{6n+3}}{2n+1}+\frac{x^{6n+4}}{3n+2}-\frac{x^{6n+6}}{6n+6}\right).$$

On a affaire à la somme de deux séries de même rayon de convergence égal à 1, le rayon de convergence de cette somme vérifie donc $R\geqslant 1$.

En notant $u_n(x)$ le terme général de la série obtenue, on a : $u_{6n+2}(x)=\dfrac{x^{6n+2}}{3n+1}$,

donc, pour $x>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{6n+2}(x)=+\infty$, et il en résulte que la suite $\left(u_n(x)\right)_{n\geqslant 1}$ est non bornée et donc que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n(x)$ diverge.

En conséquence, on a $R\leqslant 1$ et finalement $R=1$.

2) $x^2-x\sqrt{2}+1=\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}$.

On décompose en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

$$P=X^2-X\sqrt{2}+1=\left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\frac{P'}{P}=\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1}=\frac{1}{X-e^{i\frac{\pi}{4}}}+\frac{1}{X-e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

On a donc $$f'(x)=\frac{-e^{-i\frac{\pi}{4}}}{1-xe^{-i\frac{\pi}{4}}}+\frac{-e^{i\frac{\pi}{4}}}{1-xe^{i\frac{\pi}{4}}},$$

et, pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<1$, on a : $\left|xe^{-i\frac{\pi}{4}}\right|<1$ et $\left|xe^{i\frac{\pi}{4}}\right|<1$

donc $$f'(x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}x^ne^{-(n+1)i\frac{\pi}{4}}-\sum_{n=0}^{+\infty}x^ne^{(n+1)i\frac{\pi}{4}}$$

$$f'(x)=-2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\cos(n+1)\frac{\pi}{4}.$$

Le calcul qui précède montre que le développement de f' a un rayon de convergence R vérifiant $R\geqslant 1$, et puisque la série est visiblement divergente en $x=1$, ($\cos(n+1)\dfrac{\pi}{4}$ ne tend pas vers 0), on a en fait $R=1$.

Le théorème d'intégration d'une série entière donne alors, avec $f(0)=0$:

$$f(x)=-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\cos(n+1)\frac{\pi}{4}\quad\text{soit}\quad f(x)=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

et le rayon de convergence est inchangé : $R=1$.

3) f_α est de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[$.

Remarquons que $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on a $\quad f_{\alpha+2\pi} = f_\alpha$ et $f_{-\alpha} = -f_\alpha$.

On peut donc limiter l'étude à $\alpha \in [0, \pi[$.

D'autre part, $f_0 = 0$: on se limite finalement à $\alpha \in]0, \pi[$.

Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, on a $\quad f'_\alpha(x) = \dfrac{\sin\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$.

Le développement de la fonction rationnelle f'_α va s'obtenir en décomposant en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

$$f'_\alpha(x) = \frac{\sin\alpha}{\left(x - e^{i\alpha}\right)\left(x - e^{-i\alpha}\right)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - e^{i\alpha}} - \frac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right)$$

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} - \frac{e^{-i\alpha}}{1 - xe^{-i\alpha}}\right).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $\quad \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$,

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$:

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{(n+1)i\alpha} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)i\alpha}\right)$$

$$f'_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n+1)\alpha$$

Comme somme de deux séries de rayon 1, cette série a un rayon $R \geqslant 1$.

Puisque $\alpha \in]0, \pi[$, la suite $(\sin n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas 0, donc cette série diverge pour $x = 1$, et finalement, $R = 1$.

Par intégration, on obtient ensuite :

$$\forall x \in]-1, 1[,\quad f_\alpha(x) - f_\alpha(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin(n+1)\alpha \qquad (R = 1)$$

donc, avec $\alpha \in]0, \pi[$, $\forall x \in]-1, 1[$, $\quad f_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin n\alpha$.

En effet, $\dfrac{\alpha}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donne $\quad f_\alpha(0) = \operatorname{Arctan}\left(\tan\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\alpha}{2}$.

La formule reste valable pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha \in]-\pi, 0[$.

Pour $\alpha \in](2p-1)\pi, (2p+1)\pi[$, on a $\quad f_\alpha = f_{\alpha - 2p\pi}$ avec $\alpha - 2p\pi \in]-\pi, \pi[$, donc :

$$\forall x \in]-1, 1[,\quad f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{2} - p\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin n\alpha\,.$$

Ex. 6

Pour tout $x \in]-R, R[$, on a $f^2(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Posons $u_n\ :\ x \mapsto x^n f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Puisque $R > 1$, on a $[0, 1] \subset]-R, R[$ et la fonction f est continue sur $[0, 1]$. Elle est donc bornée sur ce segment et on obtient : $\qquad \forall x \in [0, 1],\ |u_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty^{[0,1]} \dfrac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}$.

La condition $R > 1$ nous donne aussi que la série de terme général $\dfrac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}$ est convergente, donc la majoration précédente montre la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0, 1]$.

Avec le théorème d'intégration terme à terme (cf. chapitre 3), cette convergence normale donne :

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction f^2 étant continue et positive sur $[0, 1]$, $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = 0$ donne $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = 0$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0.$$

Alors le développement en série entière de f montre que $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = 0$.

Ex. 7

Écrivons le développement en série entière à l'origine de $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^5}}$:

$$f(x) = (1+x^5)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^{5n}}{n!} \qquad \text{(série de rayon de convergence } R = 1\text{)},$$

avec $a_n = (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2^n} = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}$.

On en déduit $\quad I = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^{1/2} x^{5n}\mathrm{d}x$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{7n+1}(n!)^2(5n+1)}.$$

L'intégration terme à terme de la série entière est légitimée par le fait que le segment d'intégration : $[0, \frac{1}{2}]$, est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence : $]-1, 1[$. (cf. théorème 10).

Posons $u_n = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{7n+1}(n!)^2(5n+1)}$. On a alors $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{2n+1}{2^6(n+1)} \cdot \dfrac{5n+1}{5n+6} < \dfrac{1}{2^5}$, donc la série $\sum u_n$ vérifie le théorème des séries alternées.

Dans ces conditions, on sait que la somme I est comprise entre deux sommes partielles consécutives S_n et S_{n+1}, et que le reste d'ordre n : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, est majoré en valeur absolue par $|u_n|$. On calcule donc les u_k jusqu'à ce que l'on atteigne un terme de valeur absolue inférieure à 10^{-6}, il vient successivement :

$$\begin{array}{lll} u_1 & = -\dfrac{1}{6 \cdot 2^7} & -0,00133021 < u_1 < -0,00133020 \\ u_2 & = \dfrac{3}{2^{14} \cdot 11} & 0,0000166 < u_2 < 0,0000167 \\ u_3 & = -\dfrac{5}{2^{24}} & -0,0000003 < u_3 < -0,0000002 \end{array}$$

Il en résulte $0.4987142 < S_3 < I < S_2 < 0.4987147$, et donc $I \simeq 0.498714$ à 10^{-6} près par défaut.

Remarque : Maple fournit $I = 0,4987142707$ à $5 \cdot 10^{-11}$ près.

Ex. 8

La fonction $t \mapsto \sin(t - x\sin t)$ étant impaire, il vient $\operatorname{Im} f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t - x\sin t)\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi f est à valeurs réelles et comme $t \mapsto \cos(t - x\sin t)$ est paire, on a plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^{\pi} \cos(t - x\sin t)\mathrm{d}t.$$

donc aussi $f(x) = 2\int_0^{\pi} \cos t \cos(x \sin t)\mathrm{d}t + 2\int_0^{\pi} \sin t \sin(x \sin t)\mathrm{d}t$.

En remarquant que la fonction $\varphi\ :\ t \mapsto \cos t \cos(x \sin t)$ vérifie $\varphi(\pi - t) = -\varphi(t)$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi \text{ donc } \int_0^{\pi} \varphi = 0, \text{ et il reste } f(x) = 2\int_0^{\pi} \sin t \sin(x \sin t)\mathrm{d}t.$$

De même, la fonction $\psi\ :\ t \mapsto \sin t \sin(x \sin t)$ vérifie $\psi(\pi - t) = \psi(t)$. On a donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \psi$ et enfin :

$$f(x) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin(x \sin t)\mathrm{d}t.$$

Le développement en série entière de la fonction sin nous donne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{2n+2} t\mathrm{d}t.$$

Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, la série $\sum \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est convergente, donc $\sup_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} \left|(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{2n+2} t\right| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

montre que la série de fonctions de terme général $t \mapsto (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{2n+2} t$ est normalement convergente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par application du théorème d'intégration terme à terme (cf. chapitre 3), il en résulte :

$$f(x) = 4\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} t\mathrm{d}t.$$

Le calcul de l'intégrale de Wallis $W_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\mathrm{d}t$ est classique et donne $W_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$ (cf. Analyse PCSI ou MPSI, chapitre 9).

On obtient finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi\, x^{2n+1}}{2^{2n}(n+1)(n!)^2}$, et le rayon de convergence est $+\infty$.

Ex. 9

1) On trouve facilement (par exemple avec le critère de d'Alembert) que le rayon de convergence est égal à 1.
De plus la série diverge aux bornes de l'intervalle de convergence. L'ensemble de définition de f est donc $]-1, 1[$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^{4n-2}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} t^{4n-2}\mathrm{d}t$, donc :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}\mathrm{d}t.$$

Une décomposition en éléments simples donne :

$$f(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t,$$

donc :

$$f(x) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x.$$

Remarque : sur $]-1, 1[$, on peut aussi écrire : $f(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{Argth} x - \operatorname{Arctan} x)$.

2) Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1 et la fonction somme f est définie sur $[-1, 1]$ car :

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}.$$

La fonction f est continue sur $[-1, 1]$, car la majoration $\sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)} \leqslant \frac{1}{n^3}$ montre que l'on a affaire à une série normalement convergente sur cet intervalle.

Une décomposition en éléments simples donne : $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$, on en déduit :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}.$$

On reconnaît ainsi des développements usuels, et il vient :

$$f(x) = -x^2 \ln(1-x^2) - \ln(1-x^2) - 2x \ln\frac{1+x}{1-x} + 3x^2,$$

$$\text{soit encore} \quad f(x) = -(x-1)^2 \ln(1-x) - (x+1)^2 \ln(1+x) + 3x^2.$$

Enfin, comme f est continue sur $[-1, 1]$, on a aussi $f(-1) = f(1) = -4\ln 2 + 3$.

3) On sait que pour tout $u \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\frac{1+u}{1-u}$ (série entière de rayon de convergence égal à 1).

On a $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$ si et seulement si $x > 0$, donc f est définie sur $]0, +\infty[$ avec : $f(x) = \ln \dfrac{1 + \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \ln x$.

4) Posons $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$. On trouve facilement (par exemple avec le critère de d'Alembert) que le rayon de convergence est égal à 1.

D'autre part, puisque $\sup_{x\in[-1,1]} |u_n(x)| = \frac{1}{4n^2-1}$, cette série entière est normalement convergente sur $[-1, 1]$.
Il en résulte que f est définie et continue sur ce segment.
Une décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

Donc pour tout $x \in]-1, 1[$, il vient :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\operatorname{Arctan} x
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\operatorname{Arctan} x$ étant également continue sur $[-1, 1]$, on a finalement :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\operatorname{Arctan} x.$$

5) Posons $a_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch} k$, et notons R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Remarquons que l'on a ici affaire au produit de Cauchy des deux séries entières $\sum x^n \operatorname{ch} n$ et $\sum x^n$.

On sait que le rayon de convergence de $\sum x^n$ est 1. D'autre part, avec $x^n \operatorname{ch} n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^n x^n}{2}$, on voit que le rayon de convergence de $\sum x^n \operatorname{ch} n$ est $\dfrac{1}{e}$. En conséquence, d'après le théorème 6, il vient $R \geqslant \dfrac{1}{e}$.

Pour $|x| = \dfrac{1}{e}$, on a $a_n\,|x|^n \geqslant e^{-n} \operatorname{ch} n > \dfrac{1}{2}$ donc la série $\sum a_n x^n$ diverge et il en résulte $R \leqslant \dfrac{1}{e}$.

Concluons : $R = \dfrac{1}{e}$ et l'ensemble de définition de f est $\left]-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right[$.

Le théorème 7 donne $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{ch} n$,

donc, puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{ch} n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(ex)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ex} + \frac{e}{e-x}\right)$, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2(1-x)}\left(\frac{1}{1-ex} + \frac{e}{e-x}\right).$$

Ex. 10

1) Puisque $0 < \dfrac{1}{(4n+2)2^n} < \dfrac{1}{2^n}$, le critère de domination pour les séries à termes positifs donne la convergence de la série proposée. Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+2}$.

f est la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1 (appliquer par exemple le critère de d'Alembert), d'où $S = \sqrt{2} f\left(2^{-\frac{1}{4}}\right)$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n+1} = \frac{x}{1-x^4}$ donc, avec $f(0) = 0$, il vient :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t^4}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right).$$

En conclusion $S = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

2) Puisque $\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$, la règle des équivalents pour les séries à termes positifs donne la convergence de la série proposée. Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}$. Avec $\forall x \in [-1, 1]$, $\left|\dfrac{x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

f est la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1 et normalement convergente sur $[-1, 1]$. La fonction f est donc définie et continue sur $[-1, 1]$ ce qui donne $S = f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Calculons $f(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

La décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)} = \dfrac{-1}{n+1} + \dfrac{2}{2n+1}$ donne :

$$f(x) = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{x}\ln(1-x^2) + \ln\frac{1+x}{1-x}$$

c'est-à-dire $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\ln(1+x) + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\ln(1-x)$

Sachant que $\lim\limits_{u\to 0} u \ln u = 0$, on en déduit $S = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2\ln 2$.

3) La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ converge d'après le critère de Leibniz.

Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$. f est la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1. D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$ est une série alternée vérifiant le critère de Leibniz.

On a donc $\forall x \in [0,1]$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3k+1}\right| \leqslant \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \leqslant \frac{1}{3n+1}$ et il en résulte que la série entière converge uniformément sur $[0,1]$. En conséquence, f est continue sur $[0,1]$ et $S = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^{3n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{3n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Puisque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ est continue sur $]-1,+\infty[$, on obtient $S = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Le calcul de cette intégrale est classique. En écrivant : $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{3(t+1)} + \dfrac{-t+2}{3(t^2-t+1)}$,

il vient : $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

D'où finalement $\quad S = \dfrac{1}{3}\ln 2 + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Ex. 11

La série entière $\sum(3n+1)^2x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et elle est évidemment divergente en 1 et en -1. Calculons la fonction somme f.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $f(x) = 9\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n - 21\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$

donc $$f(x) = 9\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) - 21\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{4}{1-x},$$

et enfin $$f(x) = \frac{18}{(1-x)^3} - \frac{21}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^3}\left(4x^2+13x+1\right).$$

Le polynôme $4x^2+13x+1$ admet deux racines réelles x_1 et x_2 telles que $x_1 < -1 < x_2 < 0$, donc l'équation proposée admet une solution et une seule, il s'agit de $x_2 = \dfrac{-13+3\sqrt{17}}{8}$.

Ex. 12

1) Posons $a_n = \dfrac{C_{2n}^n}{2n-1}$. Alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2(2n-1)}{n+1}$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 4$ et le rayon de convergence est $\dfrac{1}{4}$.

2) On a $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n x^n$ et $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)a_{n+1}x^n$.

Alors la relation $(n+1)a_{n+1} = 2(2n-1)a_n$ donne :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)a_{n+1}x^n = 4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}na_nx^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_nx^n,$$
d'où $\quad (1+4x)f'(x) = 2f(x)$.

La solution générale de cette équation sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ est $x \mapsto \lambda\sqrt{4x+1}$ donc, compte tenu de $f(0) = a_0 = -1$, il vient $f(x) = -\sqrt{4x+1}$.

Niveau 2

Ex. 13

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les changements de variable définis par $u = x^2$ et $u = n\pi + t$ donnent :

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} \mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t+n\pi}} \mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [0, \pi]$, on a $0 \leqslant \dfrac{\sin t}{2\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant \dfrac{\sin t}{2\sqrt{t+n\pi}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$,

d'où, par croissance de l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{(n+1)\pi}} \mathrm{d}t \leqslant |a_n| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{n\pi}} \mathrm{d}t$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant |a_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ est égal à 1. Alors, en notant ρ le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, avec le corollaire du théorème 4, $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$ donne $\rho \geqslant 1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant |a_n|$ donne $\rho \leqslant 1$, d'où finalement $\rho = 1$.

2) On a $|a_n| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}$, et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. Alors la série $\sum |a_n| = \sum (-1)^n a_n$ diverge.

a_n est le terme général d'une série alternée et l'encadrement précédent donne : $|a_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant |a_n|$

donc la suite $\left(|a_n|\right)_{\mathbb{N}}$ est décroissante et puisqu'elle tend évidemment vers 0, la série $\sum a_n$ est convergente d'après le critère de Leibniz. En conclusion, l'ensemble de convergence de la série proposée est $]-1, 1]$.

Ex. 14

On suppose d'abord R_1 et R_2 non nuls.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_1 R_2$. Il existe r_1 et r_2 réels positifs tels que $|z| = r_1 r_2$ avec $r_1 < R_1$, $r_2 < R_2$ (on peut prendre, par exemple $r_1 = \sqrt{|z| \dfrac{R_1}{R_2}}$ et $r_2 = \sqrt{|z| \dfrac{R_2}{R_1}}$).

On a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n r_1^n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n r_2^n = 0$ donc $a_n b_n |z|^n = a_n r_1^n \cdot b_n r_2^n$ donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n b_n z^n = 0$.

Ceci montre que $R \geqslant R_1 R_2$.

Si R_1 ou R_2 est nul en posant par convention $R_1 R_2 = 0$ (pour éliminer le problème dû au cas où ce produit se présente sous la forme $0 \times \infty$), on a encore de façon évidente $R \geqslant R_1 R_2$.

Remarque : On peut avoir $R = R_1 R_2$.

Par exemple avec $a_n = 2^n$, $b_n = 3^n$ donc $a_n b_n = 6^n$, on a $R_1 = \dfrac{1}{2}$, $R_2 = \dfrac{1}{3}$ et $R = \dfrac{1}{6} = R_1 R_2$.

On peut aussi avoir $R > R_1 R_2$.

Par exemple avec $a_{2n} = 1$, $a_{2n+1} = 0$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = 1$ on a $R_1 = R_2 = 1$ et $a_n b_n = 0$ donc $R = +\infty$.

Autre exemple : avec $a_{2n} = 1$, $a_{2n+1} = 2^{2n+1}$, $b_{2n} = 2^{2n}$, $b_{2n+1} = 1$. On a $R_1 = R_2 = \dfrac{1}{2}$ et $R = \dfrac{1}{2}$ donc $R > R_1 R_2$.

Ex. 15

1) D'après l'hypothèse $0 < a < 1$, la série géométrique $\sum a^n$ est convergente. En conséquence, la majoration $\left|\sin(a^n x)\right| \leqslant a^n |x|$ montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}$.

La même majoration donne pour tout $A > 0$ $\| u_n \|_{\infty}^{[-A,A]} \leqslant A a^n$. La série $\sum u_n$ est donc normalement convergente sur tout segment $[-A, A]$. Cependant en remarquant que $u_n\left(\dfrac{\pi}{2a^n}\right) = 1$, il vient $\| u_n \|_{\infty}^{\mathbb{R}} \geqslant 1$, donc la série n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n^{(p)}(x) = a^{np} \sin\left(a^n x + p\frac{\pi}{2}\right)$ donc $\| u_n^{(p)} \|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant a^{np}$. Il en résulte que la série $\sum u_n^{(p)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, on sait que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$f^{(2p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^p a^{2pn} \sin\left(a^n x\right) \quad \text{et} \quad f^{(2p+1)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^p a^{(2p+1)n} \cos\left(a^n x\right),$$

donc $\quad f^{(2p)}(0) = 0 \;$ et $\; f^{(2p+1)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^p a^{(2p+1)n} = \dfrac{(-1)^p}{1 - a^{2p+1}}.$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^k(0)\frac{x^k}{k!} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

or, le calcul précédent donne $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a^{k(n+1)} = \dfrac{1}{1 - a^{n+1}}$,

il en résulte : $\quad |R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!\left(1 - a^{n+1}\right)}$.

Puisque $\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!\left(1 - a^{n+1}\right)}$ est le terme général d'une série convergente, on en déduit finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ ce qui montre que f est somme de sa série de Mac Laurin sur $\mathbb{R}$.

Le rayon de convergence est nécessairement infini.

Ex. 16

1) $\dfrac{1+t^2}{2} \geqslant t$ donne $\; a_n \geqslant \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\;$ et la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ diverge.

Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\; 0 \leqslant t^2 \leqslant t \leqslant 1\;$ donc $\; 0 \leqslant a_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \mathrm{d}t$

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{2}{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

Pour $t \in [0, 1]$, on a $\; 0 < \dfrac{1+t^2}{2} \leqslant 1\;$ donc $\; 0 < \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n\;$ et $\; 0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.

Ainsi la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n$ converge d'après le critère de Leibniz (ou critère des séries alternées).

2) D'après le 1), le rayon de convergence est $R = 1$.

Posons $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n \mathrm{d}t, \;\; x \in]-1, 1[.$

Pour tout x fixé dans $]-1, 1[$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} |x|^n$ est convergente, donc, puisque :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leqslant \left|\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n\right| < |x|^n$$

la série de fonction $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ de terme général $\; v_n : t \mapsto \left(x\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n$ converge normalement sur $[0, 1]$ et on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 v_n(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(x\frac{1+t^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}(1+t^2)}$ d'où, si $x \neq 0$, $\displaystyle f(x) = \frac{2}{x}\int_0^1 \frac{dt}{\frac{2}{x}-1-t^2}$.

Pour $x \in]0,1[$, on a $0 < \dfrac{x}{2-x} < 1$ et $f(x) = \dfrac{2}{x}\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}\,\mathrm{Argth}\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$, soit :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{Argth}\sqrt{\frac{x}{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\ell n\left(\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}\right).$$

Pour $x \in]-1,0[$, on a $\dfrac{2-x}{x} < 0$ alors :

$$f(x) = -\frac{2}{x}\int_0^1 \frac{dt}{\frac{x-2}{x}+t^2} = -\frac{2}{x}\sqrt{\frac{x}{x-2}}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

$$\text{soit}\quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x}{x-2}}.$$

Ex. 17

1) Considérons les premiers termes :

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1 \qquad a_3 = \frac{5}{6} \qquad a_4 = \frac{17}{24} \qquad a_5 = \frac{5}{8} \qquad a_6 = \frac{163}{288},$$

$$3a_3 = \frac{5}{2} \qquad 4a_4 = \frac{17}{6} \qquad 5a_5 = \frac{25}{8} \qquad 6a_6 = \frac{163}{48}.$$

On constate que $a_3 > a_4 > a_5 > a_6$,
et $3a_3 < 4a_4 < 5a_5 < 6a_6$.

Posons alors l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{P}(n)\ \begin{cases} a_3 > a_4 > a_5 > \cdots > a_{n-1} > a_n & (1)\\ 3a_3 < 4a_4 < 5a_5 < \cdots < (n-1)a_{n-1} < n\,a_n & (2)\end{cases}$$

On vient de vérifier que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n \in \{3,4,5,6\}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie avec n quelconque $n \geqslant 3$:

- alors (2) donne $a_{n-2} > 0$ et d'après la relation de récurrence : $(\mathcal{R})$: $a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2(n+1)}$, on en déduit $a_{n+1} < a_n$.
- toujours avec $(\mathcal{R})$, on obtient : $(n+1)a_{n+1} - na_n = a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2}$.

Or (2) donne $\dfrac{a_{n-2}}{2} < \dfrac{n}{2(n-2)}a_n < a_n$ dès que $n-4>0$, c'est-à-dire à partir de $n=5$.

Donc, pour $n \geqslant 5$, on obtient $(n+1)a_{n+1} - na_n > 0$.

On a ainsi prouvé que si $n \geqslant 5$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$, et la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie pour tout $n \in \{3,\ldots,5\}$, elle est vraie pour tout n.

Finalement $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante et $(na_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

On sait que le rayon de convergence R est défini par :

$$R = \sup\{|x| \ /\ \left(a_n x^n\right)_{\mathbb{N}} \text{ est bornée}\},$$

or, $(a_n)_{\mathbb{N}}$ positive décroissante est convergente donc bornée, donc $R \geqslant 1$.

Le rayon de convergence peut être également défini par :

$$R = \sup\{|x| \ /\ \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \text{ converge}\}$$

or $na_n > 2a_2$ donne $a_n > \dfrac{2}{n}$ et $\sum a_n$ diverge donc $R \leqslant 1$.

Finalement $R = 1$.

2) La relation $\mathfrak{R}$ donne, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)a_n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n = 0$$

donc $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n + \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

Avec $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, on déduit :

$$f'(x) - 1 - 2x - x\big(f'(x) - 1\big) - \big(f(x) - 1 - x\big) + \frac{x^2}{2}f(x) = 0$$

soit $\quad 2(x-1)f'(x) = (x^2-2)f(x) \qquad (E)$

En écrivant $\displaystyle \frac{x^2-2}{2(x-1)} = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2(x-1)}$, on voit que les primitives de $\displaystyle x \mapsto \frac{x^2-2}{2(x-1)}$ sur $]-\infty,1[$

et sur $]1,+\infty[$ sont les fonctions : $\displaystyle x \mapsto \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{1}{2}\ln|x-1|$.

Donc l'équation différentielle (E) donne : $\displaystyle f(x) = \lambda\frac{e^{\frac{(x+1)^2}{4}}}{\sqrt{|x-1|}}$.

Avec $f(0) = 1$ on conclut enfin que : $\displaystyle \forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}$.

Ex. 18

1) Supposons que le rayon de convergence ρ de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ soit non nul et posons :

$$\forall x \in]-\rho,\rho[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

On a alors $\displaystyle \forall x \in]-\rho,\rho[,\ f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ avec $\displaystyle v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = u_{n+1}$

donc $\displaystyle xf^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = f(x) - u_0$ c'est-à-dire $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]-\rho,\rho[\setminus \{0\}$, $f(x)$ est racine réelle de l'équation du second degré en t : $xt^2 - t + 1 = 0$, et on en déduit que :

(1) $|x| < \rho \Rightarrow 1 - 4x \leq 0$ donc $\rho \leq \dfrac{1}{4}$

(2) pour tout $x \in]-\rho,\rho[\setminus \{0\}$, il existe $\varepsilon(x) \in \{-1,1\}$ tel que $\displaystyle f(x) = \frac{1 - \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Sur les intervalles $]-\rho,0[$ et $]0,\rho[$, f est continue et $\displaystyle \varepsilon(x) = \frac{1-2xf(x)}{\sqrt{1-4x}}$ montre que la fonction ε est également continue donc constante puisqu'à valeurs dans $\{-1,1\}$.

À ce niveau on sait qu'il existe $\varepsilon_1 \in \{-1,1\}$ et $\varepsilon_2 \in \{-1,1\}$ tels que :

$$f(x) = \frac{1-\varepsilon_1\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ sur }]-\rho,0[\text{ et } f(x) = \frac{1-\varepsilon_2\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ sur }]0,\rho[.$$

f devant être continue en 0 avec $f(0) = 1$, la seule possibilité est $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ donc :

$$\forall x \in]-\rho,\rho[\setminus \{0\}, f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad , \quad f(0) = 1.$$

2) Considérons donc la fonction f définie sur $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right[$ par $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

On vérifie facilement que f est continue en 0.

- $x \mapsto \sqrt{1-4x}$ est développable en série entière de rayon $\rho = \frac{1}{4}$:

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\frac{x^n}{n!}$$

d'où $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!x^n}{n!(n+1)!}$.

- f vérifiant $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$, en posant $a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, le calcul du 1) montre que : $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

Ex. 19

On montre que f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad 4(1+x^2)y'' + 4xy' - y = 0.$$

Étant donnée une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon R non nul, sa somme S est solution de (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $4(n+1)(n+2)a_{n+2} = -(2n-1)(2n+1)a_n$ (1).

Alors, $S(0) = a_0 = 1$, donne pour tout $n \geqslant 1$, $a_{2n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (4n-3)}{(2n)!}$, donc

$$a_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{(4n-2)!}{2^{4n-1}(2n)!(2n-1)!}.$$

De même, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \frac{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (4n-1)}{(2n+1)!}$,

donc $$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(4n)!}{2^{4n+1}(2n)!(2n+1)!}.$$

On remarque que cette deuxième formule reste vraie pour $n = 0$.

En déduisant de la relation de récurrence (1) que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1, on obtient que sa somme S est solution de (E) sur $]-1, 1[$ vérifiant $S(0) = 1$, $S'(0) = \frac{1}{2}$.

En conséquence,

$$\forall x \in]-1, 1[, \; f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{(4n-2)!}{2^{4n-1}(2n)!(2n-1)!}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(4n)!}{2^{4n+1}(2n)!(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Ex. 20

1) f est l'unique solution sur $]-1, 1[$, vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{1}{3}$, de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad (1-x^2)y'' - xy' + \frac{1}{9}y = 0.$$

Étant donnée une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon R non nul, sa somme S est solution de (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)(n+2)a_{n+2} = \left(n^2 - \frac{1}{9}\right)a_n$ (1).

Alors, $S(0) = a_0 = 0$, donne pour tout $n \geqslant 0$, $a_{2n} = 0$.

De même, $a_1 = \frac{1}{3}$ donne pour tout $n \geqslant 0$, $a_{2n+1} = \frac{2^n}{3^{3n+1}} \cdot \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!}$.

En déduisant de la relation de récurrence **(1)** que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1, on obtient que sa somme S est solution de (E) sur $]-1, 1[$ vérifiant $S(0) = 0$, $S'(0) = \dfrac{1}{3}$.

En conséquence, $\quad \forall x \in]-1, 1[, \ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{3n+1}} \cdot \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!} x^{2n+1}$.

2) Le développement précédent donne :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{3n+1}} C_{3n}^n x^{2n} \text{ donc } f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{3n}^n \left(\frac{2}{27}\right)^n.$$

On en déduit $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_{3n}^n \left(\frac{2}{27}\right)^n = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

Ex. 21

Remarquons que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie $\quad$ **(1)** $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = (1 - qx) f(qx)$ avec $|q| < 1$, alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (1 - qx)(1 - q^2 x) \ldots (1 - q^n x) f(q^n x)$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f(q^n x) = f(0)$, on en déduit $f(x) = f(0) \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - q^k x)$.

Réciproquement, on montre que la fonction $\varphi \ : x \mapsto \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - q^k x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie **(1)**.

En conséquence, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et une seule vérifiant **(1)** et telle que $f(0) = \lambda$: il s'agit de $\lambda \varphi$.

On recherche alors une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul dont la somme S vérifie **(1)** et $S(0) = f(0)$ c'est-à-dire telle que $a_0 = f(0)$ et $\forall x \in]-R, R[, \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1 - qx) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n$.

On obtient $a_0 = f(0)$, $\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = f(0) \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{q^k}{q^k - 1}$ et $R = +\infty$.

D'après la remarque initiale il en résulte : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \prod_{k=1}^{n} \frac{q^k}{q^k - 1}$.

Ex. 22

1) Soit $u_n \ : \ x \mapsto e^{-n + n^2 ix}$. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ u_n^{(p)}(x) = (n^2 i)^p e^{-n + n^2 ix} \text{ d'où } \| u_n^{(p)} \|_\infty^{\mathbb{R}} = n^{2p} e^{-n}.$$

En conséquence chaque série $\sum u_n^{(p)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) Le calcul précédent donne $\forall p \in \mathbb{N}, \ f^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 i)^p e^{-n}$ donc $\left| f^{(p)}(0) \right| = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{2p} e^{-n}$.

Il en résulte $\dfrac{1}{p!} \left| f^{(p)}(0) \right| \geqslant \dfrac{p^{2p} e^{-p}}{p!} \geqslant p^p e^{-p}$. Donc quel que soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{r^p}{p!} \left| f^{(p)}(0) \right| = +\infty$ ce qui prouve que le rayon de convergence de la série $\sum f^{(p)}(0) \dfrac{x^p}{p!}$ est nul.

Ex. 23

1) Soit $u_n \ : \ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{x + n}$. D'après le critère de Leibniz, la série de fonctions $\sum u_n$ converge sur $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{Z}, x \leqslant -2\}$.

2) $u_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+p} p!}{(x + n)^{p+1}}$. Pour tout $a > -2$, et tout $p \geqslant 1$, avec $\| u_n^{(p)} \|_\infty^{[a, +\infty[} \leqslant \dfrac{p!}{(n + a)^{p+1}}$, la série dérivée $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2, +\infty[$.

3) $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x) = p! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p}}{(x+n)^{p+1}}$, $f^{(p)}(0) = p! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p}}{n^{p+1}}$, $\left|f^{(p)}(0)\right| \leqslant \frac{p!}{2^{p+1}}$ (th. des séries alternées).

$\left|f^{(p)}(0)\frac{x^p}{p!}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{x}{2}\right|^p$: le rayon de convergence R de la série de Mac Laurin de f vérifie $R \geqslant 2$.

Avec $g(x) = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, on a $f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + g(x)$.

La fonction g est de classe C^∞ sur $]-4, +\infty[$, donc sur $]-2, +\infty[$, avec pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$g^{(p)}(x) = p! \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p}}{(x+n)^{p+1}}$ d'où $\left|g^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{(x+4)^{p+1}}$.

Pour tout $x \in]-2, 2[$ notons $R_p(x)$ le reste intégral d'ordre p de la formule de Taylor appliquée à g sur $[0, x]$. Avec la majoration précédente, il vient :

$$|R_p(x)| \leqslant \left|\int_0^x (p+1)\frac{|x-t|^p}{2^{p+1}}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{|x|^{p+1}}{2^{p+1}} \text{ et, } \quad |x| < 2 \text{ donne } \lim_{p\to+\infty} R_p(x) = 0.$$

Ainsi g est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence supérieur ou égal à 2.

Sachant que $h : x \mapsto \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$ est développable en série entière à l'origine (de rayon 2), on conclut finalement qu'il en est de même pour $f = h + g$. Le rayon de convergence R de ce développement est a priori tel que $R \geqslant 2$, mais puisque $\lim_{\substack{x\to-2 \\ x>-2}} f(x) = +\infty$, on a aussi $R \leqslant 2$ et finalement $R = 2$.

Ex. 24

De $\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{u_n}{2^n} - \frac{n^2}{2^{n+1}}$, on déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{2^n} = a - \sum_{k=0}^{n-1} k^2 2^{-k-1}$.

Donc on a $u_n > 0$ pour tout n si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a > \sum_{k=1}^{n-1} k^2 2^{-k-1}$ c'est-à-dire $a \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 2^{-k-1}$.

On calcule alors $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ (série entière de rayon de convergence 2). Il vient :

$$f(x) = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \text{ donc } f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

En conséquence, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $a \geqslant \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $a \geqslant 3$.

Ex. 25

1) On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.

Il en résulte $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n x^n\right| \leqslant 2^{n+1}|x|^n$ et donc $R \geqslant \frac{1}{2}$.

2) La relation de récurrence donne :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+2},$$

d'où $(1 - x - 2x^2)S(x) = 1 + \frac{x^2}{1+x}$ puis $S(x) = \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$.

La décomposition en éléments simples $S(x) = \frac{1}{3(1+x)^2} - \frac{1}{9(1+x)} + \frac{7}{9(1-2x)}$ donne le développement en série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$: $S(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$.

Par unicité de ce développement, il vient $u_n = \frac{7}{9}\cdot 2^n + \frac{(-1)^n}{3}(n+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{9}$.

Ex. 26

1) Dans $\mathfrak{S}_n$, il y a a_{n-k} permutations admettant k points fixes donnés, il y a donc $C_n^k\, a_{n-k}$ permutations admettant k points fixes. La formule en résulte.

2) Avec $0 < \dfrac{a_n}{n!} \leqslant 1$, on voit que le rayon de convergence R de $\sum \dfrac{a_n}{n!}x^n$ est tel que $R \geqslant 1$.

Posons $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$, la formule du 1) s'écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} b_{n-k} = 1$ et on reconnaît un produit de Cauchy.

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}$,

puis de nouveau avec un produit de Cauchy : $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et $a_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Ex. 27

1) Pour tout $x \in [0,1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arctan} x$.

En posant $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, on constate que quel que soit $x \in [0,1]$, $\sum u_n(x)$ vérifie le critère de Leibniz. On en déduit, en posant $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_n(x)$, que $\| R_n \|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$ donc que la série entière converge uniformément sur $[0,1]$ puis que sa fonction somme est continue en 1.

En conséquence, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4}$.

2) De $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |v_n| = 0$.

D'autre part $|v_{n+1}| - |v_n| = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{n+2} \times \frac{1}{2n+3}$ donne $|v_{n+1}| - |v_n| \leqslant 0$.

Donc $\sum v_n$ converge d'après le critère de Leibniz.

En notant que $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$, on reconnaît un produit de Cauchy. Cependant le théorème concernant la somme d'un tel produit (chapitre 2) ne s'applique pas ici car la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

On introduit alors la série entière $\sum v_n x^{2(n+1)}$ de rayon de convergence égal à 1. Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{2(n+1)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n+1}\right)^2 = \left(\operatorname{Arctan} x\right)^2.$$

En montrant, comme en 1) que la série entière $\sum v_n x^{2(n+1)}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$, il vient finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\operatorname{Arctan} x\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$.

Ex. 28

1) Un développement en série entière donne :

$$\forall x \in [0,1[,\quad (1+x)^{\frac{2}{3}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{2}{3}-n+1\right)\cdot\frac{1}{n!}.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, cette série vérifie le théorème des série alternées et on obtient l'encadrement souhaité.

2) En appliquant le 1) au point $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient $\quad \dfrac{3}{2}\left((n+1)^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}\right) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \leqslant \dfrac{3}{2}\left((n+1)^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}\right) + \dfrac{1}{6n^{\frac{4}{3}}}$.

puis en sommant ces inégalités : $\frac{3}{2}\left[10^{\frac{14}{3}}-1\right] \leqslant S \leqslant \frac{3}{2}\left[10^{\frac{14}{3}}-1\right]+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10^7-1}\frac{1}{k^{\frac{4}{3}}}$.

Une calculatrice donne $69\,622 < \frac{3}{2}\left[10^{\frac{14}{3}}-1\right] < 69\,622{,}333$. Et, avec $\frac{1}{k^{\frac{4}{3}}} < \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{4}{3}}}$ pour $k \geqslant 2$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{10^7-1}\frac{1}{k^{\frac{4}{3}}} < 1+\int_1^{10^7-1}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{4}{3}}} < 1+3\left(1-10^{-\frac{7}{3}}\right) < 4, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10^7-1}\frac{1}{k^{\frac{4}{3}}} < \frac{2}{3} < 0{,}667.$$

On a finalement $69\,622 < S < 69\,623$ c'est-à-dire $E(S) = 69\,622$.

Ex. 29

Cette série entière a son rayon de convergence égal à 1 et, pour $|x| < 1$, on a : $(x-1)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\ell n\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$.

Pour tout $n \geqslant 2$, on a $-\frac{1}{n-1} \leqslant \ell n\,\frac{n-1}{n} \leqslant -\frac{1}{n}$ et il vient : $-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\ell n\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n \leqslant -\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$,

c'est-à-dire $x\,\ell n(1-x) \leqslant (x-1)f(x) \leqslant x+\ell n(1-x)$, et en conclusion on a $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\ell n(1-x)}{x-1}$.

Ex. 30

Si f existe on obtient pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{f(e^{i\theta})-i\theta} = 1$ donc $f(e^{i\theta}) - i\theta = 2i\pi\, k(\theta)$ avec $k(\theta) \in \mathbb{Z}$. La continuité de f donne alors que la fonction k est constante. On constate ensuite que f n'est pas bornée sur le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$ ce qui est une contradiction puisque f est continue et $\mathbb{U}$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Niveau 3

Ex. 31

La formule étant vraie pour $x = 0$, on se limite dans ce qui suit à $x \neq 0$.

Pour tout $x \in]-a, a[\setminus\{0\}$, la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) \quad \text{avec} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

De l'hypothèse $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]-a, a[,\ f^{(n)}(t) \geqslant 0$, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, a[,\quad R_n(x) \geqslant 0 \quad \text{d'où} \quad S_n(x) \leqslant f(x).$$

Pour tout $x \in]0, a[$, la suite $\left(S_n(x)\right)_{\mathbb{N}}$ est donc convergente car croissante et majorée par $f(x)$; il en résulte que $\left(R_n(x)\right)_{\mathbb{N}}$ est également convergente.

On a d'autre part, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-a, a[,\ R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\mathrm{d}u$; or la fonction $f^{(n+1)}$ est croissante car $f^{(n+2)}$ est positive, on en déduit donc que :

$$x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\mathrm{d}u \quad \text{est croissante sur }]-a, a[\setminus\{0\}.$$

Pour tout $x \in]0, a[$, fixons y tel que $0 < x < y < a$, on a alors : $0 \leqslant \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$ donc $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}R_n(y)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $R_n(y)$ admet une limite et $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}$ tend vers 0 donc $R_n(x)$ tend vers 0 et :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

Pour tout $x \in]-a,0[$, on a : $|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\mathrm{d}u \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(0)\int_0^1 (1-u)^n \mathrm{d}u$

ainsi $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$, donc $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, car on vient de voir que, pour tout $t \in]0,a[$, la série de terme général $\frac{t^n}{n!} f^{(n)}(0)$ est convergente. Finalement $\forall x \in]-a,a[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$.

Ex. 32

1) Notons que f est solution sur $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle $(E) : y' = 1 + y^2$.

Inversement, si φ est solution de (E) sur I, on a $\frac{\varphi'}{1+\varphi^2} = 1$ donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \operatorname{Arctan} \varphi(x) = x - x_0 .$$

La fonction Arctan prenant ses valeurs dans $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, il vient :

$$\forall x \in I, x - x_0 \in I \quad \text{d'où} \quad x_0 = 0 \text{ ; puis } \varphi(x) = \tan x.$$

On en déduit que f est l'unique solution de (E) sur I.

2) Avec la formule de Leibniz, $f' = 1 + f^2$ donne pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k f^{(k)} f^{(p-k)}$ (1).

Puis, une récurrence immédiate fournit $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[, \forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}(x) \geqslant 0$.

On a $f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$, (formule de Mac Laurin, reste intégral) et il vient

$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \leqslant f(x)$, ce qui assure la convergence de la série $\sum \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

Le rayon de convergence de la série de Mac Laurin de f est donc supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$, et on peut définir la fonction $\Phi : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

3) Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$, on a $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et d'après (1) :

$$\forall p \geqslant 1, f^{(p+1)}(0) = (p+1)!\,a_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k\, k!\,a_k (p-k)!\,a_{p-k} \quad \text{donc} \quad \forall p \geqslant 1, (p+1)a_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} a_k a_{p-k}.$$

De $\forall x \in I, \Phi(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$, $\Phi'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} p a_p x^{p-1}$, $\Phi^2(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k a_{p-k}\right)x^p$, on déduit alors :

$$\forall x \in I, \Phi'(x) = 1 + \Phi^2(x). \text{ Ainsi } \Phi = f \text{ d'après 1).}$$

4) Le raisonnement précédent montre que le rayon de convergence ρ de la série de Mac Laurin de f est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Si on avait $\rho > \frac{\pi}{2}$, la fonction somme de cette série serait continue en $\frac{\pi}{2}$ et f admettrait une limite finie en $\frac{\pi}{2}$. Ceci étant exclu, on a $\rho \leqslant \frac{\pi}{2}$ et finalement $\rho = \frac{\pi}{2}$.

Ex. 33

1) ▪ Montrons d'abord que $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = +\infty$ (1).

À tout $A > 0$, on peut associer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n_0} b_k \geqslant 2A$. Et puisque $\lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{n_0} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n_0} b_k \geqslant 2A$,

il existe $\eta \in]0,1[$ tel que : $\forall x \in]1-\eta, 1[, \sum_{k=0}^{n_0} b_k x^k \geqslant A$, et donc $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k > \sum_{k=0}^{n_0} b_k x^k \geqslant A$.

Ex. 34

1) f est définie et dérivable sur $]-\infty, \ell n(1+\sqrt{2})[\cup]\ell n(1+\sqrt{2}), +\infty[$ avec $f'(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{(1-\operatorname{sh} x)^2}$.

D'où le tableau résumant les variations :

x	$-\infty$		$\ell n(1+\sqrt{2})$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	0

2) f est de classe C^∞ sur $]-\infty, \ell n(1+\sqrt{2})[$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe C^∞ qui ne s'annule pas. Elle admet ainsi un développement de Taylor-Young à tout ordre en 0, donc un développement limité à tout ordre.

3) ▪ De $\operatorname{sh} x = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n)$ et $\dfrac{1}{1-\operatorname{sh} x} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (\operatorname{sh} x)^p + o(x^n)$,

on déduit que quel que soit n, les coefficients du développement limité de f à l'ordre n sont positifs.

Puisqu'il s'agit d'un développement de Taylor-Young, il en résulte que : $\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(p)}(0) \geqslant 0$

▪ Avec la formule de Leibniz et la relation $f'(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{(1-\operatorname{sh} x)^2} = \operatorname{ch} x\, f^2(x)$, il vient, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \ell n(1+\sqrt{2})[,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

▪ Comme dans les exercices **31** et **32**, la formule de Taylor avec reste intégral permet alors de montrer que pour tout $x \in [0, \ell n(1+\sqrt{2})[$, la série de Mac Laurin de f : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ est convergente car il s'agit d'une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée par $f(x)$.

▪ En conséquence, le rayon de convergence R de la série de Mac Laurin de f est tel que $R \geqslant \ell n(1+\sqrt{2})$.

Notons F sa fonction somme : $\forall x \in]-R, R[,\ F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$, il reste à prouver que :

$$\forall x \in]-R, R[,\ F(x) = f(x).$$

Posons $1 - \operatorname{sh} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, sachant que $1 = f(x)(1-\operatorname{sh} x)$, en effectuant pour n quelconque le développement limité de $x \mapsto f(x)(1-\operatorname{sh} x)$ à l'ordre n en 0, on obtient : $1 = a_0 f(0)$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0$.

Le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières donne donc :

$$\forall x \in]-R, R[,\ (1-\operatorname{sh} x)F(x) = 1 \text{ soit } \forall x \in]-R, R[,\ F(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sh} x} = f(x).$$

▪ En conclusion, on a $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$,

et puisque $\displaystyle\lim_{x \to \ell n(1+\sqrt{2})} f(x) = +\infty$ le rayon R vérifie $R \leqslant \ell n(1+\sqrt{2})$.

Comme d'autre part, on a trouvé $R \geqslant \ell n(1+\sqrt{2})$, il vient finalement : $R = \ell n(1+\sqrt{2})$.

Ex. 35

1) Soit f une solution de (E). On montre par récurrence que, quel quel soit $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Donc toute solution de (E) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Introduisons maintenant la fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{\frac{x}{1-q}} g(x)$,

Cette fonction g vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{1-q} g(x) + g'(x) = g(qx) \quad (E_1)$

Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, g est continue sur $[-x, x]$ ce qui assure l'existence de : $M_x = \| g \|_\infty^{[-x,x]}$.

Et avec (E_1), on établit par récurrence : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \| g^{(n)} \|_\infty^{[-x,x]} \leqslant \alpha^n M_x$ avec $\alpha = \dfrac{2}{1-|q|}$.

On en déduit une majoration du reste $R_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t$ de la formule de Taylor :

$$|R_n| \leqslant a^n M_x \left| \int_0^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t \right| \text{ donc } |R_n| \leqslant \frac{|ax|^n}{n!} M_x.$$

Pour tout réel x, $\dfrac{|ax|^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère de d'Alembert, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ ce qui assure que g est somme sur $\mathbb{R}$ de sa série de Mac Laurin.

Ainsi f est développable en série entière en tant que produit de deux fonctions développables.

2) On note d'abord que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_1).

À partir de (E_1), on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g^{(n)}(0) = \left(q^{n-1} - \dfrac{1}{1-q}\right) g^{(n-1)}(0)$

d'où en posant $g(0) = \lambda$, $g^{(n)}(0) = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(q^{k-1} - \frac{1}{1-q}\right)$.

On en déduit $g(x) = \lambda \left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \prod_{k=1}^{n}\left(q^{k-1} - \frac{1}{1-q}\right)\right)$ puis $f(x) = e^{\frac{x}{1-q}} g(x)$.

Ex. 36

Une récurrence immédiate donne que toute solution de (E) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1) Une solution particulière évidente est $x \mapsto \cos x$.

2) Posons $f(0) = \lambda$. D'après (E), on a immédiatement $f'(0) = 0$.

Avec la formule de Leibniz, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n+1)}(0) = -2^{1-n} \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} C_n^{2k+1} (-1)^k f^{(n-2k-1)}(0)$$

Alors, de $f'(0) = 0$, on déduit par récurrence $\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(2p+1)}(0) = 0$

De même, avec $f(0) = \lambda$, on obtient par récurrence $\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(2p)}(0) = (-1)^p \lambda$.

Remarque : pour ce second calcul, le résultat classique $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} C_n^{k} = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}$ est utile.

3) D'après le 2), si f est solution de (E), sa série de Mac Laurin est $\lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, série dont la fonction somme est $x \mapsto \lambda \cos x$.

Montrons donc que, si f est solution de (E), f est développable en série entière à l'origine.

Pour tout $a > 0$, f est continue sur $[-a, a]$ ce qui assure l'existence de $M_a = \|f\|_\infty^{[-a,a]}$.

Alors, en utilisant (E), et la formule de Leibniz, on obtient par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f^{(n)}\|_\infty^{[-a,a]} \leqslant 2^n M_a.$$

Avec la formule de Taylor avec reste intégral ou l'inégalité de Taylor-Lagrange, on en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left| f(x) - \lambda \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{|2x|^{2n+1}}{(2n+1)!} M_x$$

et, puisque $\dfrac{|2x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est le terme général d'une série convergente, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(f(x) - \lambda \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est somme de sa série de Mac Laurin, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \lambda \cos x.$$

En tenant compte du 1), l'ensemble des solutions de (E) est constitué des fonctions :

$$x \mapsto \lambda \cos x \quad,\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

CHAPITRE

6

Intégration sur un intervalle quelconque

- Pour $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$.

Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$. ✎[8]

✎[8] Divergence de première espèce.

Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

Exemple 2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

- $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$.
- Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ est divergente. ✎[9]

✎[9] Divergence de première espèce.

- Pour $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$.

Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$ (divergence de première espèce).

Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

Exemple 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}$, avec α réel, $\alpha > 0$.

$x \mapsto e^{-\alpha x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour tout x réel, $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}dt = \left[\frac{-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^x = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha x})$. On conclut avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x} = 0$.

Exemple 4 $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt = -1$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t\,dt$ est divergente.

La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Une primitive sur $]0, +\infty[$ en est $x \mapsto x\ln x - x$.

$$\int_1^x \ln t\,dt = x\ln x - x + 1$$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x\ln x - x + 1) = 1$ donne $\displaystyle\int_1^0 \ln t\,dt = 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt = -1$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x\ln x - x + 1) = +\infty$ donne la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t\,dt$.

Exemple 5 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\,dt$ est divergente (de deuxième espèce).

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ et admet la fonction sinus pour primitive.

$\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt = \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

3. Intégrale sur un intervalle ouvert

Propriété 5

Si f est une fonction réelle ou complexe, continue par morceaux sur un intervalle $]a, b[$, et s'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent, alors, pour tout $d \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^d f$ et $\int_d^b f$ convergent avec de plus : $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^d f + \int_d^b f$

C'est un corollaire de la propriété **4**.

Définition 3

Étant donné a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ et une fonction f réelle ou complexe, continue par morceaux sur $]a, b[$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est **convergente** s'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. On pose alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. ✎[10]

✎[10] D'après la propriété précédente, cette définition est indépendante du point c.

Remarque

Si a et b sont réels, et si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors les restrictions $f_a = f_{|]a,b]}$, $f_b = f_{|[a,b[}$ et $f_{a,b} = f_{|]a,b[}$ sont continues par morceaux sur $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$ respectivement.

Les trois intégrales $\int_a^b f_a$, $\int_a^b f_b$ et $\int_a^b f_{a,b}$ sont convergentes et égales à $\int_a^b f$. ✎[11]

✎[11] Ce qui assure la cohérence de cette nouvelle notion d'intégrale avec l'intégrale sur un segment.

Définition 4

Soit a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $c_1, c_2, \dots, c_n$ dans $]a, b[$ avec $c_i < c_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.

Si f est une fonction réelle ou complexe, continue par morceaux sur $]a, c_1[$, $]c_1, c_2[$, $\dots$, $]c_n, b[$, l'intégrale $\int_a^b f$ est dite **convergente** si et seulement si $\int_a^{c_1} f$, $\int_{c_1}^{c_2} f$, $\dots$, $\int_{c_n}^b f$ sont toutes convergentes.

On pose alors $\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_n}^b f$.

Exemple 6 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est divergente car $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ est divergente.

4. Propriétés

4.1 – Relation de Chasles

Dans les conditions de la définition **4** : Si $\int_a^b f$ converge, alors, quel que soit $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Remarque

Dans la suite de ce chapitre, nous ne considérons que des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert : $I = [a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Règle 2

Si f est continue sur $]a, b[$, et si F est une primitive de f sur $]a, b[$,

$\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si F admet une limite réelle en a et une limite réelle en b.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)$

☞ On applique la définition 3 et la règle précédente.

Exemple 7 Étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

La décomposition en éléments simples de f donne $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\right)$

c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{1}{6}\,\dfrac{2x-1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$.

Une primitive de f sur $[0, +\infty[$ est donc $F : x \mapsto \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$

On obtient aisément $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est donc convergente.

Avec $F(0) = -\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$, il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exemple 8 Étudier suivant les valeurs du réel α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{x}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^\alpha \mathrm{d}x$.

- La fonction $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{x}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$ est continue sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$. En posant $u(x) = \ln\dfrac{1}{x}$, on a $f_\alpha(x) = -u'(x)[u(x)]^\alpha$.
- Si $\alpha = -1$, une primitive de f_{-1} est $F_{-1} : x \mapsto -\ln u(x)$, en notant que u est strictement positive sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$, c'est-à-dire $F_{-1}(x) = -\ln\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$, il vient alors $\displaystyle\lim_{x \to 0} F_{-1}(x) = -\infty$.
- Si $\alpha \neq -1$, une primitive de f_α est $F_\alpha : x \mapsto -\dfrac{1}{\alpha+1}\left(u(x)\right)^{\alpha+1}$

c'est-à-dire $F_\alpha(x) = -\dfrac{1}{\alpha+1}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha+1}$.

On vérifie aisément que F_α admet une limite en 0 si et seulement si $\alpha + 1 < 0$ et que cette limite est alors 0.

- En conclusion, $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{x}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^\alpha \mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha < -1$ et, dans ce cas, cette intégrale vaut $F\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{\alpha+1}$.

B. Intégrales de fonctions positives

1. Théorème fondamental

Propriété 10

Soit $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $a < b$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Étant donné une fonction f réelle continue par morceaux et positive sur $[a, b[$,

$\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a, b[,\ \int_a^x f \leqslant A.$

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f$ est croissante sur $[a, b[$ car, f étant positive, on a pour tous x et x' de $[a, b[$ tels que $x < x'$, $F(x') - F(x) = \int_x^{x'} f \geqslant 0.$

Elle admet une limite en b si et seulement si elle est majorée.

Remarques

- Si $\int_a^b f$ est convergente, alors $\int_a^b f \geqslant 0.$
- La propriété **10** reste vraie avec f positive au voisinage de b.

Soit $c \in [a, b[$ tel que f soit positive sur $[c, b[$. Alors $\int_c^b f$ converge si et seulement si $\left\{\int_c^x f \;/\; x \in [c, b[\right\}$ est majoré. La conclusion résulte alors de la propriété **4** (14) car $\left\{\int_c^x f \;/\; x \in [c, b[\right\}$ est majoré si et seulement si $\left\{\int_a^x f \;/\; x \in [a, b[\right\}$ l'est aussi.

(14) $\int_a^b f$ et $\int_c^b f$ sont de même nature.

Théorème 1

Théorème fondamental

Soit f et g des fonctions réelles, continues par morceaux sur $[a, b[$ et telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. (15)

a) Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.

b) Si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge.

(15) Ce théorème reste vrai si on suppose seulement $0 \leqslant f \leqslant g$ au voisinage de b.

On peut se placer dans le cas où $a < b$.

a) Puisque $\int_a^b g$ est convergente et que g est positive, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [a, b[$, $\int_a^x g \leqslant A$ (condition nécessaire de la propriété 10).

Avec $f \leqslant g$, il vient $\int_a^x f \leqslant \int_a^x g$ et donc $\int_a^x f \leqslant A.$

La condition suffisante de cette propriété 10 nous assure alors de la convergence de $\int_a^b f.$

b) La deuxième proposition est la contraposée de la première.

2. Comparaison avec une série

Théorème 2

Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive sur $[a, +\infty[$, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $[a, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$. Alors [16]

$$\int_a^{+\infty} f \text{ est convergente si et seulement si la série } \sum_{\mathbb{N}} u_n = \sum_{\mathbb{N}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f \text{ est convergente.}$$

[16] Ce résultat permet de ramener l'étude de certaines intégrales de fonctions positives à celles de séries à termes positifs.

Notons d'abord que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente si et seulement si :

$$\int_{x_0}^{+\infty} f \text{ est convergente, et que } \int_{x_0}^{x_n} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f. \text{ [17]}$$

[17] C'est la relation de Chasles.

- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente, on a [18] $\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} f \leqslant \int_a^{+\infty} f$, donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \int_a^{+\infty} f$.

[18] f est positive.

Alors, puisque la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée, la série $\sum u_n$, à termes positifs, est convergente.

- Si la série $\displaystyle\sum_{\mathbb{N}} u_n$, est convergente, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $x \geqslant x_0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \leqslant x_p$, donc $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f \leqslant \int_{x_0}^{x_p} f$.

Il vient alors $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f \leqslant S_p \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Avec la propriété **10**, cette majoration donne la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Exemple 9 Étudier la vonvergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$, avec $f : x \mapsto x e^{-x^3 |\sin x|}$.

La fonction f étant continue et positive sur $[0, +\infty[$, il suffit d'étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f$.

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant (n+1)\,\pi \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-n^3\pi^3 |\sin x|} \mathrm{d}x$.

D'autre part, la fonction $x \mapsto |\sin x|$ étant π-périodique, on a :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-n^3\pi^3 |\sin x|} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} e^{-n^3\pi^3 \sin x} \mathrm{d}x,$$

puis $\sin(\pi - x) = \sin x$ donne : $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-n^3\pi^3 \sin x} \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n^3\pi^3 \sin x} \mathrm{d}x$,

enfin : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x$ donne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n^3\pi^3 \sin x} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2n^3\pi^2 x} \mathrm{d}x$.

D'où finalement : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{(n+1)}{\pi\, n^3}\left[1 - e^{-n^3\pi^3}\right] \leqslant \dfrac{(n+1)}{\pi\, n^3}$.

La série $\sum \dfrac{(n+1)}{\pi\, n^3}$ étant convergente car, lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{(n+1)}{\pi\, n^3} \sim \dfrac{1}{\pi\, n^2}$, la série $\sum u_n$ (à termes positifs) converge également et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est convergente. [19]

[19] La suite (x_n) choisie ici correspond aux zéros de $\sin x$.
En chacun de ces points, on a $f(x_n) = x_n$ c'est-à-dire $f(n\pi) = n\pi$.
On remarquera que cet exemple met en évidence qu'une fonction réelle, continue, positive, peut avoir une intégrale convergente sur $[a, +\infty[$ sans que cette fonction soit bornée au voisinage de $+\infty$ donc a fortiori sans qu'elle tende vers 0 en $+\infty$.

Théorème 4

Soit f une fonction réelle continue sur $]0, a]$, $a > 0$, positive au voisinage de 0.

a) Si il existe $\alpha < 1$ tel que $f(x) = \mathcal{O}_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ ou $f(x) = o_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

alors $\int_0^a f$ converge

b) Si il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{x^\alpha} = \mathcal{O}_0(f(x))$ ou $\frac{1}{x^\alpha} = o_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

alors $\int_0^a f$ diverge

On applique le critère de domination avec $g : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$,

sachant que $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple 11 Étudier les intégrales "de Bertrand" : $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha |\ell n\, x|^\beta}$ avec $0 < a < 1$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha |\ell n\, x|^\beta}$ est continue et positive sur $]0, a]$.
- $\alpha < 1$. Pour $\gamma \in]\alpha, 1[$, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} x^\gamma f(x) = 0$.

Ainsi $f(x) = o_0\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$ et $\int_0^a f$ converge.

- $\alpha > 1$. Nous avons $\lim\limits_{x \to 0} x\, f(x) = +\infty$.

Il s'ensuit $\frac{1}{x} = o_0(f(x))$ et $\int_0^a f$ diverge.

- $\alpha = 1$. Par le changement de variable $t \mapsto |\ell n\, t|$, il vient : $\int_X^a \frac{dx}{x|\ell n\, x|^\beta} = \int_{\ell n \frac{1}{a}}^{\ell n \frac{1}{X}} \frac{dt}{t^\beta}$.

$\int_0^a f$ est de même nature que $\int_{\ell n \frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$; elle converge si et seulement si $\beta > 1$.

- En conclusion, $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha |\ell n\, x|^\beta}$ converge si et seulement si :

$\alpha < 1, \beta \in \mathbb{R}$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

3.2 – Règle des équivalents

Théorème 5

Soit f et g deux fonctions réelles continues sur $[a, b[$, équivalentes au voisinage de b.

Si g est de signe constant au voisinage de b, alors il en est de même pour f

et les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature. [20]

[20] Cette règle est en défaut avec des fonctions qui ne sont pas de signe constant au voisinage de b.

Quitte à remplacer f par $-f$ et g par $-g$, on peut supposer g positive au voisinage de b.

Alors $f \underset{b}{\sim} g$ donne f positive au voisinage de b et $f = \mathcal{O}_b(g)$, $g = \mathcal{O}_b(f)$: on conclut avec le critère de domination.

Exemple 12 Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

- $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

- Étude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\mathrm{d}x$

Déterminons un équivalent de f au voisinage de 0, pour appliquer le théorème 5.

Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.

Si $\alpha = 0$, $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln 2}{x^\beta}$ et $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

Si $\alpha < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\alpha \ln x}{x^\beta}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si $\beta < 1$ (voir l'exemple **11**).

En conclusion, $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si $\beta < 1 + \sup(\alpha, 0)$.

- Étude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\mathrm{d}x$

Déterminons de même un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha \ln x}{x^\beta}$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\beta > 1$ (voir l'exemple **10**).

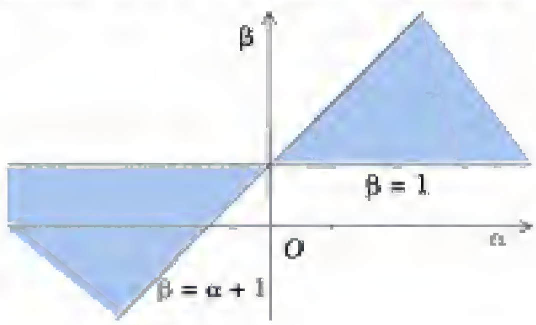
Si $\alpha = 0$, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 2}{x^\beta}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Si $\alpha < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\beta - \alpha > 1$.

En conclusion, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\beta > 1 + \inf(\alpha, 0)$.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\mathrm{d}x$ converge donc si et seulement si $(\beta-1)(\beta-\alpha-1) < 0$ c'est-à-dire, graphiquement, si et seulement si (α,β) appartient à la région bleue.



Exemple 13 Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\operatorname{th} x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ suivant les valeurs du réel α.

- $f : x \mapsto \dfrac{1-\operatorname{th} x}{x^\alpha}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$ et donc, d'après le théorème **5**, $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

- Au voisinage de $+\infty$, $1-\operatorname{th} x = \dfrac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \sim 2e^{-2x}$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ est donc de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2e^{-2x}}{x^\alpha}\mathrm{d}x$, d'après le même théorème **5**.

Par ailleurs, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^{-x}}{x^\alpha} = o(1)$ en $+\infty$.

Ainsi, $\dfrac{2e^{-2x}}{x^\alpha} = o(e^{-x})$ et, puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ converge, il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2e^{-2x}}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ (critère de domination).

- Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\operatorname{th} x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

C. Absolue convergence – Intégrabilité – Semi-convergence

1. Absolue convergence – Intégrabilité

1.1 – Définition

Définition 5

Soit f une fonction réelle ou complexe, continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: $I = [a,b[$ ou $]a,b]$ ou $[a,b]$ ou $]a,b[$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est **absolument convergente** ou que f est **intégrable** sur I lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente. ✎(21)

✎(21) Lorsque a et b sont réels et $I=[a,b]$, toute fonction f continue par morceaux est intégrable sur I

Conséquences

1) Dans le cas où $I =]a,b[$, ✎(22) c étant un point quelconque de $]a,b[$, $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente, c'est-à-dire f est intégrable sur I, si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ sont absolument convergentes, c'est-à-dire f est intégrable sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$.

2) Dans le cas particulier d'une fonction f **réelle, positive** ou, plus généralement, **de signe constant sur I**, les propositions « $\displaystyle\int_I f$ est convergente» et «f est intégrable sur I» sont équivalentes. ✎(23)

✎(22) Voir la définition 3.

✎(23) Les résultats de la section B : *Intégrales de fonctions positives*, peuvent donc être lus en remplaçant toute proposition « $\int_a^b f$ est convergente » par «f est intégrable sur $[a,b[$».

Théorème 6

Pour que l'intégrale $\int_a^b f$ soit convergente, il suffit qu'elle soit absolument convergente, c'est-à-dire que f soit intégrable sur $[a, b[$. ✎[24]

✎[24] Comme on le verra dans le paragraphe concernant la semi-convergence, cette condition n'est pas nécessaire, c'est-à-dire que, hors du cadre des fonctions réelles de signe constant, la convergence de $\int_a^b f$ ne donne pas l'intégrabilité de f.

☞ ▪ Cas où f est réelle.

Soit $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$. Nous avons $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

Avec $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$, la convergence de $\int_a^b |f|$ implique celle de $\int_a^b f^+$ et celle de $\int_a^b f^-$. On en déduit alors la convergence de $\int_a^b (f^+ - f^-)$ donc de $\int_a^b f$.

▪ Cas où f est complexe.

On introduit les parties réelle u et imaginaire v de f : $f = u + iv$.

Avec le théorème 1, les majorations $|u| \leqslant |f|$ et $|v| \leqslant |f|$ montrent que $\int_a^b u$ et $\int_a^b v$ sont absolument convergentes. L'étude du premier cas donne alors la convergence de $\int_a^b u$ et $\int_a^b v$, puis la propriété 9 donne celle de $\int_a^b f$.

1.2 – Critères d'absolue convergence. Règles de Riemann

Propriété 12

Soit f et g des fonctions réelles ou complexes, continues par morceaux sur $[a, b[$, avec g réelle positive au voisinage de b.

Si $f = O_b(g)$ ou $f = o_g(b)$ et si $\int_a^b g$ converge, c'est-à-dire si g est intégrable sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f$ est absolument convergente, c'est-à-dire que f est intégrable sur $[a, b[$.

☞ Appliquer le critère de domination, avec le couple de fonctions $(|f|, g)$.

Théorème 7

Soit f une fonction réelle ou complexe, continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

Si il existe $\alpha > 1$ tel que $f(x) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ ou $f(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

alors $\int_a^{+\infty} f$ est absolument convergente, c'est-à-dire que f est intégrable sur $[a, +\infty[$..

☞ Appliquer le théorème 3 avec la fonction $|f|$.

Théorème 8

Soit f une fonction réelle ou complexe, continue par morceaux sur $]0, a]$, $a > 0$.

Si il existe $\alpha < 1$ tel que $f(x) = O_0\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ ou $f(x) = o_0\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

alors $\int_0^a f$ est absolument convergente, c'est-à-dire que f est intégrable sur $]0, a]$..

☞ Appliquer le théorème 4 avec la fonction $|f|$.

1.3 – Propriétés des fonctions intégrables

Propriété 13

Critère de domination global

Soit f réelle ou complexe et g réelle, continues par morceaux sur I.

Si $|f| \leqslant g$ et si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

On applique le théorème 1 en envisageant les trois cas : $I =]a, b]$, $I = [a, b[$, $I =]a, b[$.
La définition de l'intégrabilité de f permet de conclure.

Propriété 14

Soit f réelle ou complexe continue par morceaux sur I.

Si f est bornée sur I et si l'intervalle I est borné, alors f est intégrable sur I. (25)

(25) Ce résultat s'applique en particulier lorsque f est prolongeable par continuité aux bornes de I.

Soit $M = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$, la fonction constante M est intégrable sur le segment S de mêmes bornes que I, donc intégrable sur I et l'inégalité $|f| \leqslant M$ donne la conclusion.

Exemple 14 Intégrabilité sur $]0, 1]$ des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ et $g : x \mapsto \sin(\ln x)$.

L'intervalle est bien sûr borné et les deux fonctions proposées sont continues sur $]0, 1]$.

f est bornée sur $]0, 1]$ car elle est prolongeable par continuité en 0, et pour g ont a clairement :

$$\forall x \in]0, 1], \quad |g(x)| \leqslant 1.$$

Propriété 15

Étant donné f et g réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I, la fonction $f + g$ est intégrable sur I.

$|f + g| \leqslant |f| + |g|$. Comme $|f|$ et $|g|$ sont intégrables, il en est de même pour $|f| + |g|$ (propriété **7**).
On en déduit que $|f + g|$ est intégrable (critère de domination global) donc que $f + g$ est intégrable.

Propriété 16

Étant donné f réelle ou complexe, continue par morceaux et intégrable sur I, et λ réel ou complexe, la fonction λf est intégrable sur I.

$|\lambda f| = |\lambda|\,|f|$. Avec $|f|$ intégrable et $|\lambda| \geqslant 0$, on a $|\lambda|\,|f|$ intégrable (propriété **6**).

Notation 1

Rappelons que $\mathcal{M}(I, \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Nous noterons $L_1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et intégrables sur I.

Propriété 17

$L_1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(I, \mathbb{K})$.

C'est un corollaire des propriétés **15** et **16**.

Exemple 15 Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$. [30]

[30] Cet exemple atteste de l'existence d'intégrales semi-convergentes.
Le lecteur pourra traiter de façon analogue les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$.

- La fonction $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{|\sin x|}{x^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

- Pour $\alpha > 1$, on a $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$ et la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ montre celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha$ (théorème 1) donc l'absolue convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.

- Pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, on a, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_\pi^{n\pi} f_\alpha = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_\alpha \quad \text{et} \quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_\alpha \geqslant \frac{1}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha}.$$

Avec $\dfrac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \sim \dfrac{2}{\pi^\alpha k^\alpha}$ lorsque $k \to +\infty$, la condition $\alpha \leqslant 1$ donne la divergence de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha}$, donc aussi celle de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} u_k$ où on a posé $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_\alpha$.

Il en résulte $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} u_k = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_\pi^{n\pi} f_\alpha = +\infty$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} f_\alpha$ est divergente et il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha$

- Pour $\alpha < 0$, on obtient avec les mêmes notations, $u_k \geqslant 2(k\pi)^{-\alpha}$, donc $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} u_k = +\infty$, ce qui assure la divergence de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} u_k$ puis la divergence de $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} f_\alpha$

2.2 – Étude au moyen d'une intégration par parties

Une intégration par parties judicieuse peut faire apparaître des fonctions intégrables.

Exemple 16 Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$. [31]

[31] On pourra établir le même résultat pour les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$.

Posons $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Une intégration par parties donne $\quad F(x) = \left[\dfrac{-\cos t}{t^\alpha}\right]_1^x - \alpha \displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire :

$$F(x) = \cos 1 - \frac{\cos x}{x^\alpha} - \alpha \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

La majoration $\left|\dfrac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ avec $\alpha + 1 > 1$ montre l'absolue convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ donc l'existence de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$.

Puisque $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} = 0$, on obtient l'existence de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$, donc la convergence de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

D'après l'exemple précédent, il en résulte que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$. [32]

[32] Le même exemple montre que $F\big((n+1)\pi\big) - F(n\pi)$ ne tend pas vers 0 lorsque $\alpha \leqslant 0$ donc que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ diverge dans ce cas.

Ainsi, pour comparer des intégrales par la règle des équivalents, il est **indispensable** de disposer de **fonctions de signe constant**.

Exemple 18 Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x} + \cos x}\,\mathrm{d}x$.

Pour $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, on a $\sqrt[3]{x} > 1$ et $\cos x > -1$ donc $\sqrt[3]{x} + \cos x > 0$.

Pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a $\sqrt[3]{x} + \cos x > 0$ et $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x} + \cos x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$, $f(x)$ est donc du signe de $\sin x$.

Il n'existe pas de voisinage de $+\infty$ sur lequel $f(x)$ soit de signe constant, la règle des équivalents ne s'applique donc pas.

Au voisinage de 0, $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + O(u^3)$ donc, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \cos x} = \frac{1}{x^{1/3}}\left(1 + \frac{\cos x}{x^{1/3}}\right)^{-1} = \frac{1}{x^{1/3}}\left[1 - \frac{\cos x}{x^{1/3}} + \frac{\cos^2 x}{x^{2/3}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

soit :
$$f(x) = \frac{\sin x}{x^{1/3}} - \frac{\sin x \cos x}{x^{2/3}} + \frac{\sin x \cos^2 x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{4/3}}\right)$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$ converge (35). On montre de la même manière que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x \cos^2 x}{x}\,\mathrm{d}x \text{ sont convergentes.}$$

Posons $f_1 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^{1/3}}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin x \cos x}{x^{2/3}}$, $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sin x \cos^2 x}{x}$.

On a alors $f = f_1 - f_2 + f_3 + g$ avec $g(x) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{4/3}}\right)$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$ est absolument convergente.

Finalement, f est la somme de quatre fonctions dont les intégrales convergent, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

(35) Exemple 16.

D. Changement de variable

Définition 7

Soit $[a, b[$ et $[\alpha, \beta[$ des intervalles de $\mathbb{R}$, avec b et β éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
Soit φ une bijection de classe C^1 de $[a, b[$ sur $[\alpha, \beta[$, avec $\beta = \lim\limits_{x \to b} \varphi(x)$.
φ est un **changement de variable bijectif** de $[a, b[$ sur $[\alpha, \beta[$.

Théorème 11

Soit f une fonction réelle ou complexe, continue par morceaux sur $[\alpha, \beta[$. Avec les notations de la définition ci-dessus, les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ et $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'$ sont de même nature, et si elles convergent, elles sont égales. (36)

(36) En observant que φ' est de signe constant sur $[a,b[$, on vérifie de même que f est intégrable sur $[\alpha,\beta[$ si et seulement si $(f\circ\varphi)\varphi'$ est intégrable sur $[a,b[$.

Pour tout $x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x (f \circ \varphi)\varphi' = \int_\alpha^{\varphi(x)} f$. En observant que $\displaystyle\lim_{x \to b} \varphi(x) = \beta$,

on conclut que la convergence de $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'$.

Inversement, on note que φ est un homéomorphisme de $[a, b[$ sur $[\alpha, \beta[$.

Pour tout $y \in [\alpha, \beta[$, $\displaystyle\int_\alpha^y f = \int_a^{\varphi^{-1}(y)} (f \circ \varphi)\varphi'$.

Avec $\displaystyle\lim_{y \to \beta} \varphi^{-1}(y) = b$, la convergence $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'$ implique celle de $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$.

Corollaire

Étant donné des intervalles $]a, b[$ et $]\alpha, \beta[$, avec a, b, α et β dans $\overline{\mathbb{R}}$, soit φ une bijection de classe C^1 de $]a, b[$ sur $]\alpha, \beta[$, avec $\alpha = \displaystyle\lim_{x \to a} \varphi(x)$ et $\beta = \displaystyle\lim_{x \to b} \varphi(x)$.

Si f, réelle ou complexe, est continue par morceaux sur $]\alpha, \beta[$, les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ et $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'$ sont de même nature et, si elles convergent, elles sont égales. [37]

[37] Comme ci-dessus, f est intégrable sur $]\alpha, \beta[$ si et seulement si $(f \circ \varphi)\varphi'$ est intégrable sur $]a, b[$.

Exemple 19 Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est un changement de variable bijectif de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$, avec $0 = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ sont donc de même nature.

Avec $\left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$ et la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, on en déduit la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\mathrm{d}x$ [38] et donc celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

[38] Théorème 1.

Exemple 20 Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x}$.

[39] $\varphi : t \mapsto 2\operatorname{Arctan} t$ est un changement de variable bijectif de $[0, +\infty[$ sur $[0, \pi[$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{3 + t^2}$.

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{3 + t^2}$ étant $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\dfrac{t}{\sqrt{3}}$, il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{3 + t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

[39] Cette intégrale existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

E. Intégration par parties

Théorème 12

Soit f, g des fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$, avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si fg a une limite réelle en b, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b fg'$ et $\displaystyle\int_a^b f'g$ sont de même nature, et si une d'elles converge, $\displaystyle\int_a^b fg' = \lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$.

Pour tout $x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x fg' = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'g$

La conclusion résulte du fait que $f(x)g(x)$ admet une limite réelle en b.

Corollaire

Soit f et g des fonctions de classe C^1 sur $]a,b[$, avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$, telles que $f(x)g(x)$ admet des limites réelles en a et en b.

Alors les intégrales $\int_a^b fg'$ et $\int_a^b f'g$ sont de même nature, et si une d'elles converge :

$$\int_a^b fg' = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - \lim_{x\to a} f(x)g(x) - \int_a^b f'g.$$

Exemple 21 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente, de valeur $\dfrac{\pi}{2}$. Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

Avec $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^2} = 0$, il vient la convergence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Avec $\dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$, la convergence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t,$$

donne celle de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Exemple 22 Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$.

$x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge en 0 par la valeur 1, ce qui assure la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

Alors l'exemple **16** donne la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ donc finalement celle de :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

Posons $u(x) = 1 - \cos x$, $v(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in]0,+\infty[$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$I = \int_0^{+\infty} u'v.$$

Avec $\displaystyle\lim_{x\to 0} u(x)v(x) = \lim_{x\to +\infty} u(x)v(x) = 0$, on obtient finalement :

$$I = -\int_0^{+\infty} uv' = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

2. Norme de la convergence en moyenne quadratique

Définition 9

Une fonction $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{K})$ est dite de **carré intégrable** sur I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I. L'ensemble de ces fonctions, noté $L_2(I, \mathbb{K})$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(I, \mathbb{K})$.

☞ Il suffit de noter que $|f+g|^2 \leqslant 2\left(|f|^2 + |g|^2\right)$.

Définition 10

Soit E_2 l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, de carré intégrable sur I :

$$E_2 = C(I, \mathbb{K}) \cap L_2(I, \mathbb{K}).$$

L'application $\varphi : E_2^2 \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), $(f, g) \mapsto \int_I fg$ (resp. $\int_I \bar{f} g$) est un produit scalaire euclidien (resp. hermitien) sur E_2.

La norme euclidienne (resp. hermitienne) associée $N_2 : f \mapsto \left(\int_I |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est appelée norme de la **convergence en moyenne quadratique**. ✎[42]

✎[42] Comme pour la définition 8, on vérifie que $\varphi(f, f) = 0$ donne $f = 0$, les autres vérifications (voir Algèbre – Géométrie, chapitre 7) sont sans difficulté.

Propriété 20

a) Avec les notations usuelles du produit scalaire, on a :

$$\forall (f, g) \in E_2^2, \quad \left|\langle f \mid g \rangle\right| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f)\, N_2(g).$$

b) Le produit scalaire $\varphi : (f, g) \mapsto \langle f \mid g \rangle$ est une application continue sur E_2^2.

☞ a) Inégalité de Cauchy – Schwarz.

b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a :

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{4}\left[N_2(f+g)^2 - N_2(f-g)^2 - i\,N_2(f+ig)^2 + i\,N_2(f-ig)^2\right]$$

et N_2 est une application continue de E_2 dans $\mathbb{C}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{4}\left[N_2(f+g)^2 - N_2(f-g)^2\right]$ donne la même conclusion.

G. Convergence dominée

Les démonstrations des théorèmes de cette section sont non exigibles.
I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point.

1. Permutation d'une limite simple et d'une intégrale

Théorème 13

Convergence dominée pour les suites de fonctions ✎[43]

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}(I, \mathbb{C})$ telle que :

(1) $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux : $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{C})$,

(2) il existe φ positive, continue par morceaux sur I, intégrable sur I : $\varphi \in L_1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leqslant \varphi(x).$$

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I et la suite $\left(\int_I f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge vers $\int_I f$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \to +\infty} f_n.$$

✎[43] La démonstration de ce théorème est hors programme.

On dit que **(2)** est l'hypothèse de **domination**.

On considère la suite $(F_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Dans le cas où les u_n sont positifs, $(F_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite croissante donc majorée par sa fonction limite f.

D'autre part, les fonctions F_n sont positives sur I. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |F_n(x)| \leqslant f(x).$$ (45)

(45) Remarquer que l'on a aussi pour tout n $\forall x \in I,\ 0 \leqslant u_n(x) \leqslant f(x)$ ce qui assure l'intégrabilité de u_n.

f étant continue par morceaux et intégrable sur I, le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions donne que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I F_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} F_n = \int_I f.$$

Puisque $\displaystyle\int_I F_n = \sum_{k=0}^{n} \int_I u_n$, ceci nous montre que la série de terme général $\displaystyle\int_I u_n$ est convergente et que sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$ est $\displaystyle\int_I f$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Dans le cas où les u_n sont négatifs, on revient à la situation précédente en considérant la série $\sum -u_n$ de somme $-f$.

Exemple 24 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Posons $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$. f est continue sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de 0 : $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc f est intégrable sur $]0, 1]$.

Au voisinage de $+\infty$: $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour tout $t > 0$, on a $e^{-t} < 1$ donc $\dfrac{1}{e^t - 1} = \dfrac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$ puis :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad u_n(t) = \sqrt{t}e^{-nt}.$$ (46)

(46) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ signifie $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} f$.

Montrons que $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du théorème 14.

(1) il est clair que $u_n \geqslant 0$,

(2) la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, sa fonction somme est f qui est continue sur $]0, +\infty[$ et on a déjà vérifié que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Donc le théorème 14 donne :

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t.$$

En posant $x = \sqrt{t}$ puis en intégrant par parties, il vient :

$$v_n = \int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-nx^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\mathrm{d}x.$$

On pose alors $y = x\sqrt{n}$ et on obtient :

$$v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y \quad \text{c'est-à-dire} \quad v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ (47)

(47) D'après la remarque suivant l'exemple précédent.

La formule en résulte.

2.2 – Cas général

Théorème 15

Convergence dominée pour les séries [48]

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathcal{M}(I, \mathbb{C})$ telle que :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est intégrable sur I : $u_n \in L_1(I, \mathbb{C})$,

(2) la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa fonction somme f est continue par morceaux sur I,

(3) la série numérique $\sum \int_I |u_n|$ converge.

Alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$ c'est-à-dire $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$.

[48] La démonstration est hors programme.

(3) est l'hypothèse de domination. On notera la présence des valeurs absolues dans celle-ci.

Exemple 25 Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Soit $f\ :\ x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$, f est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0, $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0, 1]$.

En $+\infty$, $|f(x)| \leqslant \frac{1}{e^x - 1}$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$. [49]

[49] Il n'est pas indispensable de vérifier l'intégrabilité de f puisque celle-ci nous est donnée par l'application du théorème 15. Cependant l'objectif essentiel étant de justifier l'intégration terme à terme, il est préférable pour clarifier la présentation de commencer par cette vérification.

- Pour $x > 0$, on a $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$ d'où :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sin x \mathrm{d}x.$$

Posons $f_n\ :\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ \ x \mapsto e^{-nx}\sin x$; ce sont des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ et intégrables sur $]0, +\infty[$ car $|f_n(x)| \leqslant e^{-nx}$ et $x \mapsto e^{-nx}$ avec $n \geqslant 1$ est intégrable.

La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, sa somme est f.

Il reste à montrer que la série numérique de terme général $I_n = \int_0^{+\infty} |f_n|$ est convergente.

En écrivant $I_n = \int_0^1 |\sin x|\, e^{-nx}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} |\sin x|\, e^{-nx}\mathrm{d}x$ [50] il vient :

$$I_n \leqslant \int_0^1 x\, e^{-nx}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x \quad \text{donc } I_n \leqslant \frac{1}{n^2}\left(1 - e^{-n}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}$$

[50] Au voisinage de 0, la majoration de $|\sin x|$ par 1 est «trop brutale», d'où le découpage.

Le théorème de convergence dominée pour les séries s'applique et on a donc :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sin x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin x \mathrm{d}x.$$

Le calcul de $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin x\mathrm{d}x$ est classique :

$$J_n = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+i)x}\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{(-n+i)x}}{-n+i}\right]_0^{+\infty} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{n-i}\right) = \frac{1}{n^2+1}.$$

D'où la conclusion.

c) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

d) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

e) Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

a) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto e^{-t} t^{x-1}$
et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$.
Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, f_x est continue, positive sur $]0,+\infty[$ donc $\Gamma(x)$ est définie lorsque f_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.

En 0, $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc f_x est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $x > 0$.

En $+\infty$, $f_x(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f_x est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Finalement, $\Gamma(x)$ est définie si et seulement si $x \in]0,+\infty[$.

b) f est continue sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ ✎(61) et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

✎(61) Ce qui assure les hypothèses (1) et (2) du théorème 17.

Montrons alors que f satisfait à l'hypothèse de domination pour x décrivant $[a,b]$, $a < b$, intervalle compact quelconque inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $0 < t \leq 1$, $x \mapsto t^{x-1}$ est décroissante donc pour $x \in [a,b]$, on a $0 < f(x,t) \leq t^{a-1}$.
Pour $t \geq 1$, $x \mapsto t^{x-1}$ est croissante, et alors $x \in [a,b]$ donne $0 < f(x,t) \leq e^{-t} t^{b-1}$.
Soit alors $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(t) = t^{a-1} \text{ si } t \in]0,1] \quad , \quad \varphi(t) = e^{-t} t^{b-1} \text{ si } t \in]1,+\infty[$$

φ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[, \quad 0 < f(x,t) \leq \varphi(t).$$

Ainsi Γ est continue sur $]0,+\infty[$ d'après l'extension du théorème de continuité sous le signe somme.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ avec :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}.$$

Considérons de nouveau un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et soit $\psi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \psi_k(t) = |\ln t|^k \varphi(t). \text{ ✎(62)}$$

✎(62) φ est la fonction définie en b).

Au voisinage de 0, on a $\psi_k(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ et en $+\infty$ on a encore $\psi_k(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc ψ_k est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
Par construction, on a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \psi_k(t).$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t. \qquad \mathcal{P}(k)$$

La classe $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ et l'étude de la définition de Γ assurent les hypothèses (1) et (2) de l'extension du théorème de Leibniz et les ✎(63) fonctions ψ_1 donnent l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

✎(63) Il y a une fonction ψ_1 pour chaque segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, par application de ce théorème, Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

c'est-à-dire que la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Méthodes

L'essentiel

I. Plan d'étude de l'existence d'une intégrale $\int_a^b f$

Il s'agit de déterminer :

- si la fonction f est intégrable sur I avec $I =]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]b, a]$ ou $[a, b]$;

ou

- si, f n'étant intégrable sur aucun de ces intervalles, $\int_a^b f$ est impropre convergente.

1) Étudier la continuité de f et localiser les problèmes

a) La continuité (par morceaux) permet de préciser l'intervalle I. Dans le cas où $I = [a, b]$, f est intégrable sur I et tant que fonction continue (par morceaux) sur un segment.

b) $I = [a, b[$, $\int_a^b f$ a un sens si et seulement si $\int_c^b f$ a un sens avec c quelconque dans I aussi proche que l'on veut de b. Il y alors un seul problème à étudier : en b.

Si $I =]a, b[$, $\int_a^b f$ a un sens si et seulement si $\int_a^c f$ et $\int_d^b f$ ont toutes deux un sens avec c et d quelconques dans I, aussi proches que l'on veut de a et b respectivement. Il y a alors deux problèmes à étudier : en a et en b.

2) Étude de chaque problème

La localisation précédente ramène à l'étude d'intégrales du type $\int_{[a,b[} f$ (ou $\int_{]a,b]} f$).

a) Si f est réelle

a.1 Étudier le signe de f au voisinage de b.

On peut remarquer qu'un équivalent simple de f au voisinage de b permet cette étude.

a.2 Si f est positive au voisinage de f

L'existence de $\int_{[a,b[} f$ équivaut à l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ qui peut se prouver par :

(i) le critère de domination
(ii) le critère de Riemann
(iii) la règle des équivalents
(iv) la combinaison de (i) et (iii) ou de (ii) et (iii)
(iv) la comparaison avec une série
(v) l'existence de $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6

a.3 Si f est négative au voisinage de b

$\int_{[a,b[} f$ existe si et seulement si $\int_{[a,b[} -f$ existe : on est ramené au cas précédent.

a.4 Si f n'est pas de signe constant au voisinage de b

On étudie l'intégrabilité de f en appliquant les méthodes du 1. b) à $\int_{[a,b[} |f|$.

- Si f est intégrable sur $[a, b[$, c'est-à-dire si $\int_a^b f$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f$ est convergente.

Ex. 3

Étudier l'existence de $\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

Indications

Écrire l'intégrande sous la forme $\exp\left[u(x)\right]$ et développer $u(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution

$f\ :\ x \mapsto \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} f$ a un sens si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Développons $\sqrt[3]{x+1}$ au voisinage de $+\infty$, il vient :

$$\sqrt[3]{x+1} = x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1 + o(1))$$

$$\ln\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right) = -\frac{2}{3}\ln x - \ln 3 + o(1)$$

$$f(x) = \exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x + o\left(\sqrt{x}\ln x\right)\right).$$

Formons alors :

$$x^2 f(x) = \exp\left(2\ln x - \frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x + o\left(\sqrt{x}\ln x\right)\right).$$

Sachant que $\ln x = \underset{+\infty}{o}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = 0 \text{ c'est-à-dire } f(x) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La règle de Riemann permet donc de conclure à l'intégrabilité de f.

Commentaires

$f(x) = \exp\left[\sqrt{x}\ln\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)\right]$

Le but est de trouver un équivalent simple de f ou à défaut une expression plus simple.

Cette expression de $f(x)$ ne permet pas de donner un équivalent plus simple mais en elle-même elle rend possible l'utilisation de la règle de Riemann.

Ex. 4

Étudier, suivant les valeurs du réel α, l'existence de $\int_1^{+\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x\ln^\alpha x} \mathrm{d}x$.

Indications

Écrire l'intégrande sous la forme $\exp\left[u(x)\right]$ et développer $u(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution

$f\ :\ x \mapsto \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x\ln^\alpha x}$ est continue sur $]1, +\infty[$ et positive donc $\int_1^{+\infty} f$ a un sens si et seulement si f est intégrable sur $]1, 2]$ et sur $[2, +\infty[$.

- Étude sur $[2, +\infty[$

Avec un développement limité au sens fort on obtient :

$$\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = -\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\ln\left(f(x)\right) = -\ln^\alpha x + O\left(\frac{\ln^\alpha x}{x}\right)$$

$$f(x) = e^{-\ln^\alpha x} + o(1).$$

Commentaires

Le sens fort à l'ordre 1, conduit à un développement de $\ln\left(f(x)\right)$ dont le reste tend vers 0, ce qui permet de donner un équivalent assez simple de $f(x) = \exp\left(\ln(f(x))\right)$. Le sens strict au même ordre n'est pas suffisant pour obtenir cette conclusion.

Ex. 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ donné et $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x}$. Étudier l'intégrabilité de f_α sur $[0, +\infty[$.

Indications

Comparer à une série.

Solution

f_α est visiblement positive et continue sur $[0, +\infty[$, elle est donc intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f_\alpha$ converge.

En posant $n\pi = a_n$ on a $u_n = \displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x} \mathrm{d}x$

donc $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{a_n}{1 + a_{n+1}^\alpha \sin^2 x} \mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{1 + a_n^\alpha \sin^2 x} \mathrm{d}x.$

Les fonctions intégrées étant π-périodiques, il vient :

$$a_n \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1 + a_{n+1}^\alpha \sin^2 x} \leqslant u_n \leqslant a_{n+1} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1 + a_n^\alpha \sin^2 x}$$

et puisque $\sin x = \sin(\pi - x)$:

$$2a_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a_{n+1}^\alpha \sin^2 x} \leqslant u_n \leqslant 2a_{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a_n^\alpha \sin^2 x}.$$

Enfin, la concavité de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donne :

$$2a_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a_{n+1}^\alpha x^2} \leqslant u_n \leqslant 2a_{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \frac{4a_n^\alpha}{\pi^2} x^2}.$$

On transforme alors les deux intégrales par changement de variable, il vient :

$$2a_n a_{n+1}^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2} a_{n+1}^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} \leqslant u_n \leqslant \pi a_{n+1} a_n^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{a_n^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}.$$

Sachant que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2} a_{n+1}^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{a_n^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}$

et que $a_n a_{n+1}^{-\frac{\alpha}{2}} \sim a_{n+1} a_n^{-\frac{\alpha}{2}} \sim (n\pi)^{1-\frac{\alpha}{2}}$ on obtient :

$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ avec $v_n \sim \pi (n\pi)^{1-\frac{\alpha}{2}}$ et $w_n \sim \dfrac{\pi^2}{2} (n\pi)^{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Il en résulte que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ et finalement f_α est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\dfrac{\alpha}{2} - 1 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 4$.

Commentaires

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_\alpha(n\pi) = n\pi$. Cette particularité rend impossible toute majoration globale au moyen d'une fonction usuelle intégrable et amène naturellement à introduire la série de terme général u_n.

On a pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$

Poser $t = x\, a_{n+1}^{\frac{\alpha}{2}}$ dans l'une et $t = \dfrac{2x}{\pi} a_n^{\frac{\alpha}{2}}$ dans l'autre.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$

On a en fait montré $u_n = O\left(n^{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$ et $n^{1-\frac{\alpha}{2}} = O(u_n)$.

II. Intégrabilité de fonctions réelles ou complexes

Ex. 7

Étudier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}\mathrm{d}x$.

Indications

Au voisinage de 0, majorer $|f(x)|$. Au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ est de signe constant.

Solution

$f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, positive sur $[1,+\infty[$, de signe non constant au voisinage de 0.

- Sur $]0,1]$ on a $|f(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$, et

au voisinage de 0, $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Donc $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après la règle des équivalents et il en est de même pour f par domination.

- Au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}\ln x}$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ et f est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après la règle de Riemann.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$, ce qui assure l'existence de :

$$\int_0^{+\infty} f.$$

Commentaires

Sur tout intervalle $]0,a]$, $\sin\frac{1}{x^2}$ change de signe une infinité de fois.

L'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$ est une condition nécessaire et suffisante d'existence de $\int_1^{+\infty} f$, alors que l'intégrabilité de f sur $]0,1]$ n'est qu'une condition suffisante d'existence de $\int_0^1 f$.

Ex. 8

Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \dfrac{e^{ix}}{x^{\alpha}}$.

1) Étudier l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$.

2) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour $0 < \alpha \leqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est impropre convergente.

Solution

1) f est continue sur $[1,+\infty[$ et pour tout $x \in [1,+\infty[$, $|f(x)| = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Pour $\alpha \leqslant 1$, $|f|\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ est non intégrable sur $[1,+\infty[$, il reste à montrer que pour $0 < \alpha \leqslant 1$, $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ a une limite en $+\infty$.

Commentaires

$|f|\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ est une fonction de référence.

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[-\frac{i\,e^{it}}{t^{\alpha}}\right]_1^x - i\,\alpha\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t \\ \text{soit}\quad F(x) &= i\,e^{i} - i\frac{e^{ix}}{x^{\alpha}} - i\,\alpha\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

L'intégration par parties est effectuée de façon à faire apparaître une intégrale $\int_1^x g$ avec g intégrable sur $[1,+\infty[$.

La fonction $g\ :\ t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}$ est telle que $|g(t)| = \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ et compte tenu de $\alpha > 0$, on voit que g est intégrable sur $[1,+\infty[$ ce qui assure l'existence de :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

D'autre part, $\left|\dfrac{e^{ix}}{x^{\alpha}}\right| = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ avec $\alpha > 0$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{ix}}{x^{\alpha}} = 0$ et finalement F a une limite dans $\mathbb{C}$ en $+\infty$, ce qui prouve que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ est impropre convergente.

III. Convergence dominée

Ex. 9

Étudier les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathrm{d}x$;

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$;

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x}\mathrm{d}x$.

Indications

1) Appliquer le théorème de convergence dominée.

2) Prolonger la fonction intégrée sur $[0,+\infty[$ au moyen de la fonction nulle sur $]n,+\infty[$.

3) Commencer par effectuer le changement de variable défini par $x = t\sqrt{n}$ puis appliquer la méthode du 2).

Solution

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n\ :x \mapsto \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ est continue, positive sur $[0,+\infty[$ et intégrable d'après la règle de Riemann.

Avec $f_n(x) = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-2x}$ et $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{x}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on obtient pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$.

La concavité sur $]0,+\infty[$ de la fonction $\ln$ donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) \leqslant e^{-x}$.

Commentaires

Quand x tend vers $+\infty$, on a $f_n(x) \sim \lambda x^n e^{-2x}$ avec $\lambda = n^{-n}$.
Donc $x^2 f_n(x) \sim \lambda x^{n+2} e^{-2x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = 0$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f\ :x \mapsto e^{-x}$.
Pour tout $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$ donc $f_n(x) \leqslant e^{n\frac{x}{n}-2x}$.

Montrons maintenant que F est continue en 1.

Il suffit de montrer que F est continue sur $[0,2]$.

La fonction $\Phi : (x, \theta) \mapsto \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)$ est continue sur $[0, 2] \times]0, \pi[$.

Pour tout $x \in [0, 2]$ et $\theta \in]0, \pi[$, on a :

$$\sin^2\theta \leqslant (x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \leqslant 10$$

$|x - \cos\theta| \leqslant x + |\cos\theta| \leqslant 3$.

$$\text{donc} \quad \left|\ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)\right| \leqslant \max\left(\ln 10, 2\,|\ln\sin\theta|\right)$$

$$\leqslant \ln 10 - 2\ln\sin\theta.$$

car $\ln\sin\theta \leqslant 0$.

La fonction $\Psi : \theta \mapsto \ln 10 - 2\ln\sin\theta$ étant intégrable sur $]0, \pi[$, on dispose ainsi d'une domination qui montre, avec le théorème de continuité sous le signe somme, que F est continue sur $[0, 2]$.

Comme au début du 2), on a $\Psi(\theta) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)$ quand $\theta \to 0$ et $\Psi(\pi - \theta) = \Psi(\theta)$.

En conséquence, F est continue en 1 donc aussi en -1 et finalement, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Par parité.

Calculons maintenant $F'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{2(x-u)}{1 + x^2 - 2ux} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2 - 1}{x} \cdot \dfrac{1}{1 + x^2 - 2ux}$

donc $F'(x) = \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{1}{x} + \frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{1}{1 + x^2 - 2x\cos\theta}\right) d\theta$ soit :

$$F'(x) = \frac{\pi}{x} + \frac{x^2 - 1}{x} I(x).$$

$I(x)$ est introduite dans le 1).

D'après le 1), on obtient $F'(x) = 0$ si $|x| < 1$ et $F'(x) = \dfrac{2\pi}{x}$ si $|x| > 1$.

Il en résulte l'existence de deux constantes k_0 et k_1 telles que :

Avec $F'(0) = -2\displaystyle\int_0^\pi \cos\theta \, d\theta = 0$, ce résultat reste valable pour $x = 0$.

$$F(x) = k_0 \qquad \text{pour } x \in]-1, 1[$$

$$F(x) = k_1 + 2\pi\ln|x| \qquad \text{pour } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\,.$$

En tenant compte de la parité de F et de $x \mapsto \ln|x|$.

Enfin $F(0) = 0$ donne $k_0 = 0$, puis la continuité en 1 donne $k_1 = 0$, d'où finalement :

$$F(x) = 0 \qquad \text{pour } |x| \leqslant 1$$

$$F(x) = 2\pi\ln|x| \qquad \text{pour } |x| \geqslant 1.$$

F est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Exercices

Niveau 1

Intégrabilité – Calcul d'intégrales

Ex. 1

Étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \operatorname{th}^\alpha x)\mathrm{d}x$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Ex. 2

Étudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'existence de :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) \mathrm{d}x.$$

Ex. 3

Étudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ l'existence de :

$$\int_0^{+\infty} \Big(1 + \ln\left(2 \operatorname{sh} x^\alpha\right) - 2 \operatorname{sh} \ln\left(1 + x^\alpha\right)\Big)\mathrm{d}x.$$

Ex. 4

Prouver l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \operatorname{ch} x \sin^2 x}$.

Ex. 5

Prouver l'existence puis calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Ex. 6

Prouver l'existence puis calculer l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(2 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ex. 7

Prouver l'existence puis calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x.$$

Ex. 8

Soit $f : x \mapsto \ln \sin x$, et $g : x \mapsto \ln \cos x$.

1) Montrer que f et g sont intégrables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g$.

2) En considérant $I + J$, calculer I et J.

Convergence dominée

Ex. 9

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, continue par morceaux et bornée. Étudier la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(t)}{1 + n^2 t^2}\mathrm{d}t.$$

Ex. 10

Soit $x \in]-1, +\infty[$, calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Ex. 11

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Ex. 12

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th} x)\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2}.$$

Intégrales dépendant d'un paramètre

Ex. 13

1) Montrer que la fonction :

$$F : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)(1 + ixy)}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Expliciter $F(y)$.

Ex. 14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}\mathrm{d}t$

et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1) Exprimer f en fonction de g.

2) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Ex. 15

1) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos xt\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

Indications

Ex. 16

Donner un équivalent de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}$ au voisinage de 0 et au voisinage de 1 puis poser successivement :

$$x = \frac{1}{t} \text{ et } u = \sqrt[3]{t-1}.$$

Ex. 17

$$\int_0^a \frac{\operatorname{th} 3x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{3a} \frac{\operatorname{th} x}{x}\mathrm{d}x.$$

Ex. 18

1) Voir l'exemple 9 du cours.

3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, minorer $|f(t)|$ pour $t \in [x, x+a]$, puis minorer $\displaystyle\int_x^{x+a} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Ex. 19

(1) $\iff$ (3) : considérer la série de terme général

$$\int_{n^2}^{(n+1)^2} f\left(e^{-t}\right)\mathrm{d}t.$$

(1) $\iff$ (4) : considérer la fonction $h\ :\ u \mapsto \dfrac{1}{u^2} f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ et la série de terme général $h(n)$.

Ex. 20

2) Théorème de convergence dominée.

Ex. 21

$$I = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{-ax}\left(\int_0^{\pi} e^{ix\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}x$$

$\displaystyle\int_0^{a} e^{-ax}\left(\int_0^{\pi} e^{ix}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}x$ se transforme par le théorème de Fubini. (Cf. chapitre 11.)

Ex. 22

f n'est pas supposée de signe constant au voisinage de $+\infty$!

L'hypothèse, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, n'est donc pas équivalente à l'intégrabilité de f sur $[0, +\infty[$ mais à l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f$.

Intégrer par parties $\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ en posant :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Ex. 23

Sur $[1, +\infty[$, on se ramène à l'étude de l'intégrabilité de $t\ :\mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^a}$ que l'on peut effectuer par comparaison avec une série.

Ex. 24

Considérer la série de terme général :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x\,\mathrm{d}x.$$

Ex. 25

$$f\ :\ x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Évaluer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f$ en intégrant par parties.

Ex. 26

Utiliser $\sin^3 t = \dfrac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$ pour se ramener à l'étude de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$.

Ex. 27

Étudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \cos\left(\frac{t^2}{t+1}\right)\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.

Ex. 28

Utiliser le théorème de convergence dominée. Une majoration de $\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)$, $0 \leqslant x < n$ peut se déduire du développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$.

Ex. 29

Effectuer le changement de variable défini par :

$$x = \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

puis utiliser le théorème de convergence dominée.

Ex. 30

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ avec :

$$v_n = \int_{-n}^{n} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

puis étudier cette deuxième limite au moyen du théorème de convergence dominée.

Ex. 31

Montrer que $h\ :\ x \mapsto f(x) + ig(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution d'une équation différentielle simple.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $f_\alpha \ : \ ]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto 1-\text{th}^\alpha x$ est continue, positive si $\alpha > 0$ et négative si $\alpha < 0$. L'intégrale proposée a un sens si et seulement si f_α est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Comme $f_0 = 0$, nous supposons α non nul.

- Étude de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0^+.

Si $\alpha > 0$: $f_\alpha(x) \sim 1$, si $\alpha < 0$: $f_\alpha(x) \sim -x^\alpha$.

D'après le critère des équivalents, f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha > -1$.

- Étude de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

De $\text{th}\, x = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ on déduit $\text{th}\, x = 1 - 2e^{-2x} + o\left(e^{-2x}\right)$

$\text{th}^\alpha x = 1 - 2\,\alpha\, e^{-2x} + o\left(e^{-2x}\right)$ et $1 - \text{th}^\alpha x \sim 2\,\alpha\, e^{-2x}$

donc, d'après la règle des équivalents, quel que soit α, f_α est intégrable sur $[1,+\infty[$.

- En conclusion, f_α est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > -1$.

Ex. 2

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f \ : \ x \mapsto x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})$ est continue positive sur $]0,+\infty[$. Donc l'intégrale I_α a un sens si et seulement si f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Pour tout $x \geqslant e$, on a $f(x) \geqslant x^\alpha$. Il s'ensuit que si $\alpha \geqslant -1$, f est non intégrable sur $[1,+\infty[$ car $x \mapsto x^\alpha$ est alors non intégrable.

Pour $\alpha < -1$, au voisinage de $+\infty$ on a $f(x) \sim x^\alpha \ln x$. En conséquence, avec β vérifiant $\alpha < \beta < -1$, il vient $f(x) = o\left(x^\beta\right)$ et, d'après le critère de domination, f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

- On se limite maintenant à $\alpha < -1$.

Au voisinage de 0, $x + e^{\alpha x} = 1 + (1+\alpha)x + o(x)$ et donc $\ln(x+e^{\alpha x}) \sim (1+\alpha)x$ puis : $f(x) \sim (1+\alpha)x^{1+\alpha}$.

On en déduit que f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha + 1 > -1$, c'est-à-dire $\alpha > -2$.

- En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ a un sens si et seulement si $-2 < \alpha < -1$.

Ex. 3

$f \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(1 + \ln\left(2\,\text{sh}\, x^\alpha\right) - 2\,\text{sh} \ln\left(1+x^\alpha\right)\Big) \mathrm{d}x$ est continue sur $[0,+\infty[$.

- Au voisinage de 0, $f(x) \sim \alpha \ln x$, donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est intégrable sur $]0,1]$ d'après le critère de domination.
- Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\ln\left(2\,\text{sh}\, x^\alpha\right) = \ln\left(e^{x^\alpha} - e^{-x^\alpha}\right) = \ln e^{x^\alpha} + \ln\left(1 - e^{-2x^\alpha}\right)$$
$$= x^\alpha + O\left(e^{-2x^\alpha}\right).$$

et, avec $2\,\text{sh} \ln\left(1+x^\alpha\right) = 1 + x^\alpha - \dfrac{1}{1+x^\alpha} = 1 + x^\alpha - \dfrac{1}{x^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$, compte tenu de $e^{-2x^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$, il vient $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$.

f étant bornée, il existe $M = \|f\|_\infty^{\mathbb{R}_+}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall t \in [0, +\infty[$, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{nM}{1+n^2t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{nM}{1+n^2t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en est de même pour f_n ce qui assure l'existence de u_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable défini par $x = nt$ donne $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Posons alors $g_n \ : x \mapsto \dfrac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}$. $(g_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ convergeant simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $g \ : x \mapsto \dfrac{f(0^+)}{1+x^2}$ où $f(0^+)$ désigne la limite à droite de f en 0.

Comme de plus on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, +\infty[$, $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{M}{1+x^2}$ avec $x \mapsto \dfrac{M}{1+x^2}$ intégrable sur $]0, +\infty[$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} g(x)\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{f(0^+)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0^+).$$

Ex. 10

Posons $\quad f_n \ : \ t \mapsto t^x\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue, positive sur $]0, 1]$.

Au voisinage de 0, $f_n(t) \sim t^x$ et puisque, par hypothèse, on a $x > -1$, f_n est intégrable sur $]0, 1]$.

- Sachant que pour tout $x > -1$, on a $\ell n(1+x) \leqslant x$ (inégalité de convexité), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \forall t \in]0,1],\ \ \ell n\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n} \quad \text{donc} \ \ 0 < f_n(t) = t^x e^{n\,\ell n\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant t^x e^{-t} \leqslant t^x.$$

- Enfin, il est clair que la suite (f_n) converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction $f \ : \ t \mapsto t^x e^{-t}$ qui est continue (et intégrable) sur $]0, 1]$.
- Ainsi, puisque la fonction $\varphi \ : \ t \mapsto t^x$ est continue et intégrable sur $]0, 1]$ le théorème de convergence dominée s'applique et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1]} f_n = \int_{]0,1]} f \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 t^x e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Ex. 11

La fonction $f \ : x \mapsto e^{-x}\cos\sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et telle que $|f(x)| \leqslant e^{-x}$ donc, d'après le critère de domination, elle est intégrable sur cet intervalle.

Le développement en série entière de cos à l'origine donne :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n e^{-x}}{(2n)!},$$

donc f est somme sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions continues de terme général $u_n \ : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^n e^{-x}}{(2n)!}$ (1).

Chaque u_n est, d'après la règle de Riemann, intégrable sur $[0, +\infty[$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{-x} = 0$ (2).

Posons alors $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x$, une intégration par parties donne $I_n = nI_{n-1}$ et on en déduit $I_n = n!I_0$ soit $I_n = n!$. En conséquence, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \frac{n!}{(2n)!}$ donc, pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$ ce qui prouve que la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n|$ est convergente (3).

Avec **(1)**, **(2)**, **(3)**, le théorème de convergence dominée pour les séries donne :

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Ex. 12

Soit $f : x \mapsto \ell n(\operatorname{th} x)$, f est continue et négative sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de 0, on a $f(x) \sim \ell n\, x$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est intégrable sur $]0, 1]$.

Au voisinage de $+\infty$, $\operatorname{th} x = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 - 2e^{-2x} + o\left(e^{-2x}\right)$ donne $f(x) \sim -2e^{-2x}$ donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après la règle des équivalents.

Pour tout $x > 0$ on a $0 < e^{-2x} < 1$ donc le développement en série entière à l'origine de $x \mapsto \ell n(1 + x)$ (de rayon de convergence égal à 1) donne :

$$\begin{aligned}\ell n(\operatorname{th} x) &= \ell n\left(1 - e^{-2x}\right) - \ell n\left(1 + e^{-2x}\right)\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2nx}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-2nx}}{n} = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-2(2n+1)x}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Alors puisque f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est somme d'une série de fonctions de signe constant, le théorème de convergence dominée appliquée à la suite des sommes partielles de cette série donne :

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} -2\frac{e^{-2(2n+1)x}}{2n+1} \mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ex. 13

1) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{(1 + x^2)(1 + ixy)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Avec $|f(x, y)| = \dfrac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2y^2}}$, on obtient $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x, y)| \leqslant \dfrac{1}{1 + x^2}$ donc, $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on déduit du théorème de continuité sous le signe somme que $F : y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, posons $f_y : x \mapsto f(x, y)$, $u = \operatorname{Re}(f_y)$ et $v = \operatorname{Im}(f_y)$. Puisque f_y est intégrable sur $\mathbb{R}$, on sait qu'il en est de même pour u et v. De plus avec $f(x, y) = \dfrac{1 - ixy}{(1 + x^2)(1 + x^2y^2)}$, on voit que u est paire et v impaire, il vient donc $F(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_y = 2\int_0^{+\infty} u = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)(1 + x^2y^2)}$.

Il est maintenant clair que F est paire et on peut donc se limiter pour le calcul à $y \in [0, +\infty[$.

Pour $y \neq 1$, une décomposition en éléments simples donne :

$$u(x) = \frac{1}{1 - y^2}\left(\frac{1}{1 + x^2} - \frac{y^2}{1 + x^2y^2}\right) \text{ donc } F(y) = \frac{2}{1 - y^2}\Big[\operatorname{Arctan} x - y \operatorname{Arctan} xy\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{1 + y}.$$

Les fonctions F et $y \mapsto \dfrac{\pi}{1 + y}$ étant continues en 1, cette formule reste vraie en ce point.

Finalement en tenant compte de la parité on obtient pour tout $y \in \mathbb{R}$, $F(y) = \dfrac{\pi}{1 + |y|}$.

Ex. 14

1) Posons $\varphi : (x, t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}$. Il est clair que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ et, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (dans le cas d'une intégrale sur un segment),

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$$

donc, avec le changement de variable défini par $u = xt$, on obtient :

$$f'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = -2g'(x)g(x).$$

2) On déduit du 1) que $f + g^2$ est constante donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x)^2 = f(0) + g(0)^2 = f(0) = \frac{\pi}{4} \text{ c'est-à-dire } g(x)^2 = \frac{\pi}{4} - f(x) \qquad (1).$$

Puisque $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$ et vérifie $\forall t \in [1,+\infty[,\ e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$, elle est intégrable sur cet intervalle et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Or en remarquant que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $0 \leqslant \varphi(x,t) \leqslant \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}$, on obtient $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, en conséquence la relation (1) donne :

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} g^2(x) = \frac{\pi}{4}$$

et, en tenant compte de la positivité, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ex. 15

1) $\varphi : (x,t) \mapsto e^{-t^2}\cos xt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue sur cet intervalle et pour tout $t \geqslant 1$, on a $|\varphi(x,t)| \leqslant e^{-t}$.

Avec $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -te^{-t^2}\sin(xt)$, on obtient : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant te^{-t^2}$.

En conséquence, la fonction $t \mapsto te^{-t^2}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$, le théorème de dérivation sous le signe somme donne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ avec pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$.

2) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-t^2}\sin(xt) = 0$, une intégration par parties donne :

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}f(x).$$

La solution générale de l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$ est $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$ donc, compte tenu de $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir par exemple l'exercice précédent), il vient finalement $f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Niveau 2

Ex. 16

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}$ est continue et positive sur $]0,1[$.

Au voisinage de 0, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2/3}}$ et au voisinage de 1, $f(x) \sim \dfrac{1}{(1-x)^{1/3}}$, donc f est intégrable sur $]0,1[$.

- $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]1,+\infty[$ sur $]0,1[$ donc, en posant $x = \dfrac{1}{t}$, il vient $I = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[3]{t-1}}$.

De même $t \mapsto \sqrt[3]{t-1}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et, en posant $u = \sqrt[3]{t-1}$ on obtient :

$$I = 3\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{d}u}{u^3+1}.$$

Enfin, posons $u = \dfrac{1}{v}$ pour avoir $I = 3\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^3}$. Avec les deux dernières expressions de I, il vient :

$$I = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u+1}{u^3+1}\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1} \quad \text{soit} \quad I = \sqrt{3}\left[\operatorname{Arctan}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ex. 17

- La fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\operatorname{th} 3x - \operatorname{th} 2x}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et positive.

Quand x tend vers 0, $(\operatorname{th} 3x - \operatorname{th} 2x) \sim x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$; f est prolongeable par continuité en 0, elle est donc intégrable sur $]0, 1]$.

En $+\infty$, $\operatorname{th} 3x = 1 - 2e^{-6x} + o\left(e^{-6x}\right)$, $\operatorname{th} 2x = 1 - 2e^{-4x} + o\left(e^{-4x}\right)$

et $e^{-6x} = o\left(e^{-4x}\right)$ donc $\operatorname{th} 3x - \operatorname{th} 2x = 2e^{-4x} + o\left(e^{-4x}\right)$ et $f(x) \sim \dfrac{2}{x}e^{-4x}$.

Il en résulte $f(x) = o\left(e^{-4x}\right)$ et f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- Pour $\alpha > 0$, on a $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{th} \lambda x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\lambda\alpha} \frac{\operatorname{th} t}{t}\mathrm{d}t$ d'où $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{th} 3x - \operatorname{th} 2x}{x}\mathrm{d}x = \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{\operatorname{th} t}{t}\mathrm{d}t.$

La fonction th étant croissante :

$$\operatorname{th} 2\alpha \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant I_\alpha \leqslant \operatorname{th} 3\alpha \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad , \quad \operatorname{th} 2\alpha \,\ell n \frac{3}{2} \leqslant I_\alpha \leqslant \operatorname{th} 3\alpha \,\ell n \frac{3}{2}.$$

On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} 3x - \operatorname{th} 2x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = \ell n \frac{3}{2}.$

Ex. 18

1) La réponse est négative. Par exemple, on a vu que la fonction $x \mapsto xe^{-x^3|\sin x|}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et non bornée au voisinage de $+\infty$ (cf. exemple 9 du cours).

2) - f étant décroissante, le théorème de la limite monotone donne l'existence de $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telle que :

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

En supposant $\ell \in \mathbb{R}^*$, on obtient $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell$ donc d'après la règle des équivalents f est non intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

De même si on suppose $\ell = -\infty$, il existe $a \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [a, +\infty[$, $f(x) \leqslant -1$ et f est encore non intégrable sur $[0, +\infty[$. Il reste donc une seule possibilité : $\ell = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

- f étant intégrable sur $[0, +\infty[$ on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{x}{2}}^{x} f = 0.$

Avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la décroissance de f donne pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$f(x) \geqslant 0 \text{ et } \int_{\frac{x}{2}}^{x} f \geqslant \frac{x}{2} f(x) \geqslant 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0.$$

3) Posons $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} \left|f'(x)\right|$. En écrivant pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$, $f(t) - f(x) = \displaystyle\int_x^t f'(u)\mathrm{d}u$,

il vient $|f(t) - f(x)| \leqslant M\,|t - x|$ donc $|f(x)| - M\,|t - x| \leqslant |f(t)|$.

Ainsi pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_x^{x+a} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant a\,|f(x)| - M\int_x^{x+a} (t - x)\mathrm{d}t \text{ et donc } |f(x)| \leqslant \frac{1}{a}\int_x^{x+a} |f(t)|\,\mathrm{d}t + M\frac{a}{2}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, fixons $\alpha = \frac{\varepsilon}{M}$. L'inégalité précédente donne alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme précédemment, l'intégrabilité de f (donc de $|f|$) sur $[0,+\infty[$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+\alpha} |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$.

Donc il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$ on ait $\int_x^{x+\alpha} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon\,\alpha}{2}$.

En conclusion, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \geqslant 0$ tel que $x \geqslant A \ \Rightarrow\ |f(x)| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Ex. 19

(1) $\Longleftrightarrow$ (2)

$g\ :\ t \mapsto f\left(e^{-t}\right)$ est positive, continue par morceaux et décroissante sur $[0,+\infty[$ donc, d'après un théorème de comparaison de série et d'intégrale (cf. chap. **2** théorème **10**), $\sum g(n)$ converge si et seulement si g est intégrable sur $[0,+\infty[$.

(1) $\Longleftrightarrow$ (3)

D'après le théorème **2** de ce chapitre, la fonction g étant positive sur $[0,+\infty[$ elle est intégrable sur cet intervalle si et seulement si la série de terme général $\int_{n^2}^{(n+1)^2} g(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

Or la croissance de f donne :

$$(2n+1)f\left(e^{-(n+1)^2}\right) \leqslant \int_{n^2}^{(n+1)^2} g(t)\mathrm{d}t = \int_{n^2}^{(n+1)^2} f\left(e^{-t}\right)\mathrm{d}t \leqslant (2n+1)f\left(e^{-n^2}\right).$$

Donc, puisque $(2n+1)f\left(e^{-n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} nf\left(e^{-n^2}\right)$ et $(2n+1)f\left(e^{-(n+1)^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2(n+1)f\left(e^{-(n+1)^2}\right)$, cet encadrement montre que les séries de termes généraux $\int_{n^2}^{(n+1)^2} g(t)\mathrm{d}t$ et $nf\left(e^{-n^2}\right)$ sont de même nature.

L'équivalence **(1) $\Longleftrightarrow$ (3)** en résulte.

(1) $\Longleftrightarrow$ (4)

L'application $t \mapsto e^t$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$ donc $g\ :\ x \mapsto f\left(e^{-t}\right)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $h\ :\ u \mapsto \frac{1}{u}f\left(\frac{1}{u}\right)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et alors les intégrales sont égales (cf. théorème **11**). Comme de plus h est décroissante (en tant que produit de deux fonctions positives décroissantes), elle est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si la série $\sum h(n)$ est convergente. L'équivalence **(1) $\Longleftrightarrow$ (4)** en résulte.

Ex. 20

1) La fonction $F\ :\ x \mapsto n\,\ell n\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc I_n a un sens si et seulement si F est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour $f(x) \leqslant n$, on a $0 \leqslant \frac{f(x)}{n} \leqslant 1$ donc $\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha} \leqslant \frac{f(x)}{n}$ et alors $\ell n\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) \leqslant \left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha} \leqslant \frac{f(x)}{n}$.

Pour $f(x) > n$, on obtient :

$$1 < \left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha} \text{ donc } 1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha} \leqslant 2\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha} \text{ puis } \ell n\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) \leqslant \alpha\,\ell n\left(\frac{2f(x)}{n}\right) \leqslant \frac{2\alpha}{n}f(x).$$

Dans tous les cas, on a $F(x) \leqslant 2\,\alpha\,f(x)$ ce qui, avec le critère de domination, assure l'intégrabilité de F.

2) Si $\alpha = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,\ell n\left(1+\frac{f(x)}{n}\right) = f(x)$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\,\ell n\left(1+\frac{f(x)}{n}\right) \leqslant f(x)$. Donc, compte tenu de l'intégrabilité de f, le théorème de convergence dominée donne $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_{\mathbb{R}} f$.

Si $\alpha > 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}f(x)^{\alpha} = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) \leqslant 2\,\alpha\, f(x).$$

Donc le théorème de convergence dominée donne maintenant $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Ex. 21

- La fonction $(x,\theta) \mapsto \cos(x\sin\theta)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$, donc $f\ :\ x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est continue sur $\mathbb{R}$, et il en est de même pour $x \mapsto e^{-\alpha x}f(x)$. On a de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|e^{-\alpha x}f(x)\right| \leqslant \pi e^{-\alpha x}$, or $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (d'après l'hypothèse $\alpha > 0$), il en est donc de même pour $x \mapsto e^{-\alpha x}f(x)$.

Le même raisonnement montre que $x \mapsto e^{-\alpha x}\int_0^{\pi} e^{ix\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et on a :

$$I = \mathrm{Re}(J) \text{ avec } J = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\left(\int_0^{\pi} e^{ix\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}x.$$

- Soit $J_a = \int_0^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\pi} e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}\,\mathrm{d}\theta$; $J = \lim\limits_{a\to+\infty} J_a$.

D'après le théorème de Fubini, la fonction $(\theta,x) \mapsto e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}$ étant continue sur $[0,\pi]\times[0,a]$, on peut intervertir les intégrations, d'où :

$$J_a = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a} e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{e^{a(-\alpha+i\sin\theta)}-1}{-\alpha+i\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

En majorant : $\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{a(-\alpha+i\sin\theta)}}{-\alpha+i\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^{\pi}\frac{e^{-\alpha a}}{\sqrt{\alpha^2+\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\pi}\frac{e^{-\alpha a}}{\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha a}$, il vient :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{a(-\alpha+i\sin\theta)}}{-\alpha+i\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad (\text{car } \alpha > 0).$$

Ainsi, on obtient :

$$\lim_{a\to+\infty} J_a = \int_0^{\pi}\frac{1}{\alpha-i\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \text{ et } I = \int_0^{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \text{ ou encore } I = 2\,\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\alpha^2+\sin^2\theta}$$

car $\sin\theta = \sin(\pi-\theta)$, donc $I = 2\,\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{\alpha^2}{\cos^2\theta}+\tan^2\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = 2\,\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\alpha^2(1+t^2)+t^2}$ (changement de variable $t = \tan\theta$) c'est-à-dire

$$I = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}\left[\mathrm{Arctan}\,\frac{t\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}\right]_0^{+\infty}.$$

D'où finalement $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+1}}$

Ex. 22

Posons, pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = \int_0^{x} f$. La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

En intégrant par parties, nous avons $\int_0^{x} tf(t)\mathrm{d}t = xF(x) - \int_0^{x} F(t)\mathrm{d}t$, d'où :

$$(1)\quad \frac{1}{x}\int_0^{x} tf(t)\mathrm{d}t = F(x) - \frac{1}{x}\int_0^{x} F(t)\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = I$, où on a posé $I = \int_0^{+\infty} f$.

On a ainsi défini une suite $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ de fonctions positives continues sur $[0,+\infty[$ qui converge simplement sur cet intervalle vers la fonction $f\ :x\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

En considérant le développement en série entière à l'origine de $x\mapsto \ell n(1-x)$ on obtient que :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\quad 0\leqslant f_n(x)\leqslant \frac{1}{1+x^2}e^{\frac{1}{n}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}.$$

On en déduit que $\forall x\in[0,+\infty[,\quad 0\leqslant f_n(x)\leqslant F(x)$ avec $F\ :x\mapsto \dfrac{e}{1+x^2}$.

La fonction F étant intégrable sur $[0,+\infty[$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Ex. 29

Les fonctions $f_n\ :x\mapsto \dfrac{n^2x^n}{(1+x^n)^n+(1-x^n)^n}$ sont continues sur le segment $[0,1]$ et on sait que l'on a :

$$u_n=\int_{[0,1]}f_n=\int_{]0,1]}f_n.$$

On se limite à $n\geqslant 1$. Puisque $t\mapsto\left(\dfrac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ est une bijection de classe C^1 de $]0,n]$ sur $]0,1]$, le changement de variable défini par $x=\left(\dfrac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ donne :

$$u_n=\int_{]0,n]}\frac{n^{-\frac{1}{n}}t^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n+\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}\mathrm{d}t,\text{ c'est-à-dire } u_n=\int_{]0,+\infty[}g_n$$

où g_n est définie par $g_n(t)=\dfrac{n^{-\frac{1}{n}}t^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n+\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}$ si $t\in]0,n]$ et $g_n(t)=0$ si $x>n$.

$(g_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $]0,+\infty[$ convergeant simplement sur cet intervalle vers :

$$g\ :t\mapsto\frac{1}{2\operatorname{ch}t}.$$

Pour trouver une domination, on peut d'abord remarquer que $\forall t\in]0,+\infty[,\quad 0\leqslant g_n(t)\leqslant\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{-n}$, puis la concavité de ℓn donne $\forall x\in[0,1],\quad \ell n(1+x)\geqslant x\,\ell n\,2$ et on en déduit $\forall t\in]0,+\infty[,\quad 0\leqslant g_n(t)\leqslant e^{-t\,\ell n\,2}$. (En fait cette majoration est établie sur $]0,n]$ et elle reste valable sur $]n,+\infty[$ puisqu'alors $g_n(t)=0$.)

La fonction $t\mapsto e^{-t\,\ell n\,2}$ étant intégrable sur $]0,+\infty[$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}t}=\frac{\pi}{4}.$$

Ex. 30

Avec le critère de domination, l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$ assure celle de $t\mapsto f(t)e^{-n^2t^2}$. On pose $u_n=n\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(t)e^{-n^2t^2}\mathrm{d}t$.

On se limite à $n\geqslant 1$. Le changement de variable défini par $t=\dfrac{x}{n}$ donne $u_n=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Dans le cas où f est bornée sur $\mathbb{R}$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R},\quad\left|f\left(\dfrac{x}{n}\right)\right|e^{-x^2}\leqslant Me^{-x^2}$ avec $M=\|f\|_\infty^{\mathbb{R}}$ et le théorème de convergence dominée donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=f(0)\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Cependant on sait que l'intégrabilité n'impose pas que f soit bornée sur $\mathbb{R}$. La preuve n'est donc pas complète.

Dans le cas général, écrivons $u_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{-n}f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{-n}^{n}f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{n}^{+\infty}f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x.$

Avec $\left|\int_n^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x\right| \leqslant n\int_1^{+\infty} |f(t)|\,e^{-n^2t^2}\mathrm{d}t \leqslant ne^{-n^2}\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,\mathrm{d}t$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x = 0$

et de même on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{-n} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x = 0$. Posons alors $v_n = \int_{-n}^{n} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_n$ où on définit f_n par :

$$f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2} \text{ si } x \in [-n, n] \quad \text{et} \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}\setminus[-n, n].$$

$(f_n)_{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux convergeant simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto f(0)e^{-x^2}$ et, en posant $A = \|f\|_\infty^{[-1,1]}$, elle est dominée par la fonction $x \mapsto Ae^{-x^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc le théorème de convergence dominée donne $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(0)\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. En conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f(0)\sqrt{\pi}$.

Ex. 31

La fonction $u : \mathbb{R}\times]0, +\infty[, \ (x, t) \mapsto \dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ et telle que $|u(x, t)| = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

Avec $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = o_{+\infty}(e^{-t})$, on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ce qui assure l'existence de $h(x) = \int_{]0,+\infty[} u(x, t)\mathrm{d}t$ et donc aussi de $f(x) = \operatorname{Re} h(x)$ et $g(x) = \operatorname{Im} h(x)$.

On a d'autre part $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \sqrt{t}e^{-t+ixt}$ donc $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right| = \sqrt{t}e^{-t}$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}e^{-t}$ étant intégrable sur $]0, +\infty[$, h est, d'après le théorème de Leibniz, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $h'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt}\mathrm{d}t$.

Une intégration par parties fournit :

$$h'(x) = \left[\sqrt{t}e^{-t}\cdot\frac{1}{x}e^{ixt}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-t+ixt} - \sqrt{t}e^{-t+ixt}\right)\mathrm{d}t$$

donc $\quad h'(x) = -\dfrac{1}{2x}f(x) + \dfrac{1}{ix}h'(x)$ puis $h'(x) + \dfrac{x-i}{2(x^2+1)}h(x) = 0$.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x-i}{2(x^2+1)}$ étant $A : x \mapsto \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{i}{2}\operatorname{Arctan} x$, l'équation précédente donne $(he^A)' = 0$ et on en déduit l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \lambda e^{-A(x)}$.

Le calcul de $h(0) = \int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, donne finalement $h(x) = \sqrt{\pi}e^{-A(x)}$.

En conclusion, $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x\right), \quad g(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x\right)$.

En utilisant $\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ et $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$, on peut enfin en déduire :

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Niveau 3

Ex. 32

1) f étant positive, elle est intégrable sur $]0, x]$ si et seulement si $\int_a^x f$ est majorée pour a décrivant $]0, x]$. Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\forall a \in]0, x], \left(\int_a^x f\right)^2 \leqslant \left(\int_a^x f^2\right)\left(\int_a^x 1\right) \leqslant x\int_0^x f^2 \text{ soit encore } \forall a \in]0, x], 0 \leqslant \int_a^x f \leqslant \left(x\int_0^x f^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On vérifie facilement que pour tout $x \geqslant 0$, $\sum u_n(x)$ est une série alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées ; on a donc :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_n(x)| \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}.$$

Ainsi, la suite (R_n) des restes $\left(R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right)$ est telle que $\| R_n \|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n}$, elle converge donc uniformément vers 0 ce qui prouve que $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $[0, +\infty[$. La continuité de F sur $[0, +\infty[$ en résulte.

3) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt}\sin t$. Pour tout $a > 0$ et tout $x \geqslant a$, on a encore $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant e^{-at}$ donc par extension du théorème de Liebniz, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Pour $x > 0$, $F'(x) = \mathrm{Im}\int_0^{+\infty} -e^{(-x+i)t}\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{x-i}\right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{x^2+1}$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $F(x) = \lambda - \mathrm{Arctan}\, x$. F étant continue en 0, il vient $\lambda = F(0)$. Enfin, $|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ donne $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et donc $\lambda = \frac{\pi}{2}$. En conclusion, $F(0) = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Ex. 34

1) Pour tout $a > 0$, $\varphi_a : t \mapsto \frac{\ln(a^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et telle que $\varphi_a(t) = o_{+\infty}\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)$; elle est donc intégrable sur cet intervalle. Posons pour tout $a > 0$, $f(a) = \int_0^{+\infty} \varphi_a(t)\mathrm{d}t$.

Calcul de $f(1)$: le changement de variable défini par $t = \tan x$ donne $f(1) = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x$.

Donc $f(1) = \pi \ln 2$. (Cf. exercice **8**.)

2) **Calcul de** $f(a)$: considérons $\Phi :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $(a, t) \mapsto \frac{\ln(a^2+t^2)}{1+t^2}$.

Φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Pour tout $a \in]0, +\infty[$, $t \mapsto \Phi(a, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour tout (A, B) tel que $0 < A < B$, on a $\forall (a, t) \in [A, B]\times]0, +\infty[$, $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial a}(a, t)\right| \leqslant \frac{2B}{(A^2+t^2)(1+t^2)}$. Donc, par extension du théorème de Leibniz, f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec :

$$f'(a) = 2a\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

Pour $a \neq 1$, on obtient $f'(a) = \frac{2a}{a^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{a^2+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{a+1}$.

Ce résultat reste valable en 1 par continuité de f', d'où $\forall a \in]0, +\infty[$, $f(a) = f(1) + \int_1^a \frac{\pi}{x+1}\mathrm{d}x = \pi\ln(a+1)$.

Remarque : on peut établir que f est définie et continue en 0 et le calcul précédent fournit $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$.

Ex. 35

1) Soit $\Phi : (x, t) \mapsto \frac{\cos xt}{1+t^2}$. Sur $\mathbb{R}\times[0, +\infty[$, Φ est de classe C^∞ et $|\Phi(x, t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $\mathbb{R}$. La parité de f permet de limiter ensuite l'étude à $x \in [0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, le changement de variable défini par $u = xt$ donne $f(x) = xg(x)$ avec :

$$g(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2+x^2}\mathrm{d}u.$$

CHAPITRE

7 Séries de Fourier

A. Fonctions régularisées Polynômes trigonométriques

1. L'espace préhilbertien D

Définition 1

On note D le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé de l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux [1] vérifiant pour tout x réel :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right].$$

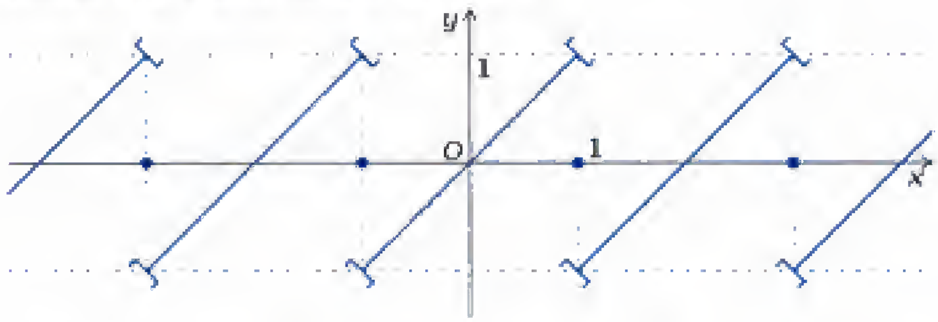
[1] Rappelons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si f est continue par morceaux sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue par morceaux admet en tout point x de $\mathbb{R}$ une limite à droite notée $f(x+0)$ et une limite à gauche notée $f(x-0)$. Une autre notation usuelle pour ces limites à droite et à gauche est $f(x^+)$, et $f(x^-)$.

D est, par exemple, un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Exemple

On vérifie facilement que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$ et $f(x) = x - 2E\left(\frac{x+1}{2}\right)$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, appartient à l'espace D.

Donnons ci-après sa représentation graphique.



Propriété 1

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, alors f est continue par morceaux si et seulement si f est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$.

Dans ce cas, f n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $[0, 2\pi]$.

Propriété 2

Toute fonction f de l'espace D est bornée et on a, quel que soit le réel a :

$$\|f\|_\infty^{\mathbb{R}} = \|f\|_\infty^{[0,2\pi]} = \|f\|_\infty^{[a,a+2\pi]}.$$

Définition 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

On lui associe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'espace D en posant, pour tout réel x :

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right]$$

Cette fonction $\tilde{f}$ est appelée la **régularisée** de f. [2]

[2] Sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, f et $\tilde{f}$ ne diffèrent qu'en un nombre fini de points et il en résulte en particulier $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

(3) Cf. Algèbre-Géométrie, chapitre 5.

(4) Les fonctions étant 2π-périodiques, on a pour tout a réel : $\int_0^{2\pi} \overline{f} g = \int_a^{a+2\pi} \overline{f} g$.

Définition 3

On définit un **produit scalaire** (3) sur D par :

$$D^2 \to \mathbb{C}, \quad (f, g) \mapsto (f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x. \text{ (4)}$$

Muni de ce produit scalaire, D est un espace préhilbertien complexe, la norme d'une fonction f de D est notée $\| f \|_D$, elle est définie par :

$$\| f \|_D^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x.$$

Cette définition est justifiée par le fait que, si $f \in D$ vérifie $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x = 0$, alors $f = 0$ (fonction nulle de D). (5)

(5) Les autres conditions requises pour avoir affaire à un produit scalaire se vérifient sans difficulté : $f \mapsto (f \mid g)$ est semi-linéaire, $g \mapsto (f \mid g)$ est linéaire, $(f \mid g) = \overline{(g \mid f)}$ pour tout (f, g), $(f \mid f) \geqslant 0$ pour tout f.

En effet, il existe une subdivision $(t_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ de $[0, 2\pi]$ telle que la restriction de f à tout intervalle $]t_{k-1}, t_k[$, $1 \leqslant k \leqslant p$, admet un prolongement continu f_k sur $[t_{k-1}, t_k]$, donc tel que : $\quad f_k(t_{k-1}) = f(t_{k-1} + 0) \quad$ et $\quad f_k(t_k) = f(t_k - 0)$.

Comme $\displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f_k(x)|^2\, \mathrm{d}x = 0$, la fonction continue f_k est nulle sur $[t_{k-1}, t_k]$, donc f est nulle sur $]t_{k-1}, t_k[$ et $f(t_{k-1} + 0) = f(t_k - 0) = 0$. $(1 \leqslant k \leqslant p)$

Comme f est dans D : $\quad f(t_k) = \dfrac{1}{2}\left[f(t_k + 0) + f(t_k - 0)\right] = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant p - 1)$.

De plus, f étant 2π-périodique, $t_0 = 0$, $t_p = 2\pi$ donne $f(t_p + 0) = f(t_0 + 0)$ et :

$$f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{2}\left[f(t_p - 0) + f(t_0 + 0)\right] = 0.$$

Donc f est nulle sur $[0, 2\pi]$, et par 2π-périodicité f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1

La famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit une fonction e_n de D par $\quad e_n(x) = e^{inx}$.

Alors $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de l'espace préhilbertien D.

Chaque fonction $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e_n(x) = e^{inx}$ est continue, 2π-périodique, et on a :

$$\langle e_p | e_q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(q-p)x}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p = q, \\ 0 & \text{si} \quad p \neq q. \end{cases}$$

Théorème 2

Inégalité de Bessel

Pour toute fonction f de D et tout n de $\mathbb{N}$: $\quad \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \left|\langle e_k \mid f \rangle\right|^2 \leqslant \| f \|_D^2$.

(6) Cf. Algèbre-Géométrie, chapitre 5.

(7) Noter que $\langle e_k \mid f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx} \mathrm{d}x$.

Le sous-espace $E_n = \mathrm{Vect}\,(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ étant de dimension finie, il admet dans D un supplémentaire orthogonal, (6) et puisque $(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n, la projection orthogonale de f sur E_n est $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \langle e_k \mid f \rangle e_k$. (7)

La décomposition $f = S_n(f) + [f - S_n(f)]$ avec $S_n(f) \in E_n$, $[f - S_n(f)] \in E_n^{\perp}$ et le théorème de Pythagore donnent alors : $\quad \| f \|_D^2 = \| S_n(f) \|_D^2 + \| f - S_n(f) \|_D^2$, d'où :

$$\| S_n(f) \|_D^2 = \sum_{k=-n}^{n} \left|\langle e_k \mid f \rangle\right|^2 \leqslant \| f \|_D^2 \quad \text{avec égalité si et seulement si } f \in E_n.$$

(8) Nous verrons plus loin que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle e_n | f \rangle^2 = \| f \|_D^2$.

(9) On peut aussi noter que ce résultat se déduit du lemme de Lebesgue, cf. chapitre 4.

Corollaire 1

Soit $f \in D$; les séries de termes généraux $\left|\langle e_n \mid f \rangle\right|^2$ et $\left|\langle e_{-n} \mid f \rangle\right|^2$ sont convergentes (8)

donc en particulier $\lim_{n\to+\infty} \langle e_n \mid f \rangle = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \langle e_{-n} | f | = \rangle 0$.

Corollaire 2

Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux. Alors les suites de termes généraux :

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\mathrm{d}x,\ \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x,\ \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ \int_0^{2\pi} \sin nx\mathrm{d}x$$ (9)

convergent vers 0.

Il existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, unique, 2π-périodique et, telle que $\forall x \in [0, 2\pi[$, $F(x) = f(x)$.
La régularisée $\tilde{F}$ de F appartient à D et, sur $[0, 2\pi]$, f et $\tilde{F}$ ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \tilde{F}(x)e^{inx}\mathrm{d}x$.

Il résulte donc du corollaire 1 que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = 0$,

puis avec $\cos nx = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ et $\sin nx = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$, on obtient les deux autres limites.

2. Polynômes trigonométriques

Définition 4

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ engendre un sous-espace vectoriel de D dont les éléments sont appelés **polynômes trigonométriques**.

Propriété 3

Soit P une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(1) P est un polynôme trigonométrique.

(2) Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(c_k)_{-n\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$ tels que $P : x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$.

(3) Il existe $n \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que :

$$P : x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

(10) Pour $P=0$, (1), (2), (3) sont évidemment vérifiées.

(11) C'est la définition d'une combinaison linéaire. Le support I est défini par $I=\{k\in\mathbb{Z} / c_k\neq 0\}$.

Supposons $P \neq 0$. (10) P est un polynôme trigonométrique si et seulement si il existe une famille $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de support I fini telle que $P = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k = \sum_{k\in I} c_k e_k$. (11)

En posant $n = \max\{|k| / k \in I\}$, on obtient $I \subset [\![-n, n]\!]$ et $P = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$.

Donc (1) $\Rightarrow$ (2).
La réciproque (2) $\Rightarrow$ (1) est évidente.
On obtient (2) $\Rightarrow$ (3) en posant $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = c_k + c_{-k}$ et $b_k = i(c_k - c_{-k})$ (donc $b_0 = 0$) ; et enfin on obtient (3) $\Rightarrow$ (2) en posant :

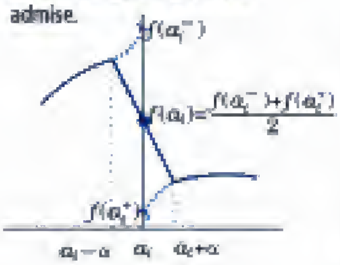
$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},\ \text{et } c_k = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Théorème 3

Pour tout $f \in D$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe P polynôme trigonométrique tel que :

$$\|f - P\|_D \leqslant \varepsilon.$$ (12)

(12) On peut énoncer cette propriété en disant que le sous-espace $E=\text{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans D.
La démonstration peut être admise.



Montrons d'abord que pour tout $f \in D$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\|f - g\|_D \leqslant \varepsilon$.

Si f est continue, il suffit de prendre $g = f$.

Sinon, fixons $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit continue en a. Alors sur le segment $[a, a + 2\pi]$, f admet un nombre fini de points de discontinuité. Soit $a_1\, a_2, \dots, a_p$ ces points avec $a < a_1 < a_2 < \dots < a_p < a + 2\pi$, $(p \geqslant 1)$, on obtient ainsi une subdivision σ de $[a, a + 2\pi]$:

$$\sigma = \left(a, a_1, a_2, \dots, a_p, a + 2\pi\right).$$

Posons $M = \|f\|_\infty^{\mathbb{R}}$, $\alpha = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{4Mp}, \dfrac{|\sigma|}{2}\right)$ et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, notons φ_i la fonction affine telle que $\varphi_i(a_i - \alpha) = f(a_i - \alpha)$, $\varphi_i(a_i + \alpha) = f(a_i + \alpha)$.

Puisque $\alpha \leqslant \frac{|\sigma|}{2}$, on a $a \leqslant a_1 - \alpha$, $a_p + \alpha \leqslant a + 2\pi$ et $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $a_i + \alpha \leqslant a_{i+1} - \alpha$.

Enfin soit g la fonction 2π-périodique définie par :

$g(x) = f(x)$ sur $\left[a, a_1 - \alpha\right]$

$g(x) = \varphi_1(x)$ sur $\left[a_1 - \alpha, a_1 + \alpha\right]$

$g(x) = f(x)$ sur $\left[a_1 + \alpha, a_2 - \alpha\right]$

$g(x) = \varphi_2(x)$ sur $\left[a_2 - \alpha, a_2 + \alpha\right]$

...

$g(x) = f(x)$ sur $\left[a_{p-1} + \alpha, a_p - \alpha\right]$

$g(x) = \varphi_p(x)$ sur $\left[a_p - \alpha, a_p + \alpha\right]$

$g(x) = f(x)$ sur $\left[a_p + \alpha, a + 2\pi\right]$.

Par construction g est continue sur $\mathbb{R}$. (13)

(13) Une fonction 2π-périodique est entièrement définie par sa restriction à tout intervalle $[a, a+2\pi[$. Ici, on a de $g|_{[a,a+2\pi]}$ continue sur $[a, a+2\pi]$ et $g(a)=g(a+2\pi)$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.
Remarquer comment le choix de a (point où f est continue) facilite la construction de g.

On a alors $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} (f - g) = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_i-\alpha}^{a_i+\alpha} (f - g) \leqslant \sum_{i=1}^{p} 4M\alpha \leqslant \varepsilon.$

Le résultat précédent étant acquis, à $f \in D$, on associe g continue, 2π-périodique telle que $\|f - g\|_D \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et, d'après le deuxième théorème de Weierstrass, il existe P polynôme trigonométrique tel que $\|g - P\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ ce qui implique $\|g - P\|_D \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, et finalement par inégalité triangulaire, il vient $\|f - P\|_D \leqslant \varepsilon$.

Exemple 1

Que peut-on dire des nombres réels ou complexes $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ tels que la fonction $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ soit constante ?

Dans l'espace préhilbertien D, $\left(e_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale, elle est donc libre. (14)

(14) De ce fait, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de l'espace E des polynômes trigonométriques.

La fonction Q est un polynôme trigonométrique qui s'écrit :

$$Q(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (a_k - ib_k)\, e^{ikx} + (a_k + ib_k)\, e^{-ikx}.$$

Si Q est constante, on a $Q = \lambda e_0$ et donc $\lambda e_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(a_k - ib_k\right)e_k + \left(a_k + ib_k\right)e_{-k}$

d'où on tire $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k - ib_k = a_k + ib_k = 0$ et $\lambda = 0$.

Remarque : on vient en fait de montrer que la famille constituée par les fonctions $x \mapsto \cos kx$, $k \in \mathbb{N}$ et $x \mapsto \sin kx$, $k \in \mathbb{N}^*$, est libre. Comme de plus elle est génératrice de l'espace E des polynômes trigonométriques (d'après la propriété 3), elle en constitue une seconde base.

Conclusion : $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0$ et $Q = 0$.

B. Coefficients et séries de Fourier

Définition 5

Coefficients de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

On appelle coefficients de Fourier exponentiels de f les nombres complexes :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

On appelle coefficients de Fourier trigonométriques les nombres complexes :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad , \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Remarques

- Si $\tilde{f}$ est la régularisée de f (cf. définition 2), f et $\tilde{f}$ ont les mêmes coefficients de Fourier. $c_n(f) = c_n(\tilde{f}) = \langle e_n \mid \tilde{f}\rangle$ (avec les notations du A.).
- L'application $c_n : f \mapsto c_n(f)$ est linéaire, c'est-à-dire que pour f et g 2π-périodiques continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, on a $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$.

Définition 6

Série trigonométrique

On appelle série trigonométrique associée à une famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$, la série de fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dont le terme général u_n est défini par $u_0 = c_0$ (fonction constante) et :

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Définition 7

Série de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique associée à la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f.

Elle est souvent notée $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$. (15)

(15) Notation usuelle mais dangereuse car elle ne rend pas compte du terme général de la série qui est $x \mapsto c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}$ et non pas $x \mapsto c_n(f)e^{inx}$.

Remarque

Les séries de Fourier de f et de sa régularisée $\tilde{f}$ sont identiques.

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

Propriété 4

Les coefficients de Fourier de f sont liés pour tout $n \in \mathbb{N}$ par les relations :

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad , \quad b_n(f) = i\big(c_n(f) - c_{-n}(f)\big)$$

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad , \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$$

En particulier $a_0 = 2c_0$ et $b_0 = 0$.

Propriété 5

Pour tout réel α, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$. (16)

En particulier, $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$, $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$.

(16) $x \mapsto f(x)e^{-inx}$ étant 2π-périodique, l'intégrale $\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$ est indépendante du réel α.

(1) $\Rightarrow$ (2) car $c_n = \langle e_n \mid u_n \rangle$, donc $|c_n| \leqslant \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)|$.

(2) $\Rightarrow$ (3) car $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$,

donc $|a_n| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$ et $|b_n| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$.

(3) $\Rightarrow$ (1) car $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| \leqslant |a_n| + |b_n|$.

Théorème 5

Si la série trigonométrique de terme général $u_n : x \mapsto c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors :

a) sa somme f est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$,

b) la famille des coefficients de Fourier exponentiels de f est $(c_n)_{\mathbb{Z}}$. (24)

(24) La série considérée est donc identique à la série de Fourier de sa somme.

a) C'est une application du théorème de continuité de la somme d'une série normalement convergente de fonctions continues.

b) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la série de fonctions de terme général : $v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto u_n(x)e^{-ipx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ car $\| v_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \| u_n \|_\infty^{\mathbb{R}}$.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique : (25)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ipx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)e^{-ipx}\Big)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle e_p \mid u_n\rangle = c_p .$$

(25) Cf. chapitre 3, théorème 4.

Exemple 2 Soit $f \in D$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}c_n(f)$ est absolument convergente. Que peut-on dire des séries analogues $\sum \frac{1}{n}c_{-n}(f)$, $\sum \frac{1}{n}a_n(f)$, et $\sum \frac{1}{n}b_n(f)$?

Existe-t-il $f \in D$ telle que $a_n(f) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$?

L'inégalité $2ab \leqslant a^2 + b^2$ donne $\left|\frac{2}{n}c_n(f)\right| \leqslant \frac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2$. La conclusion résulte donc de la convergence des séries de termes généraux $\frac{1}{n^2}$ et $|c_n(f)|^2$. (26)

(26) Utiliser $c_n(f)=(e_n \mid f)$ et le corollaire 1 du théorème 2.

De même, les séries $\sum \frac{1}{n}c_{-n}(f)$, $\sum \frac{1}{n}a_n(f)$ et $\sum \frac{1}{n}b_n(f)$ sont absolument convergentes.

L'équivalence $a_n(f) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$ donne que $\sum \frac{1}{n}a_n(f)$ diverge. (27)

C'est contradictoire, il n'existe donc pas de telle fonction.

(27) Voir l'étude des séries de Bertrand dans le chapitre 2.

Exemple 3 **Calcul des sommes de Fourier : le noyau de Dirichlet.**

Soit $f \in D$, $(a_k)_{\mathbb{N}}$, $(b_k)_{\mathbb{N}}$ ses coefficients de Fourier.

a) Montrer que, pour tout x réel et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}[f(x+u) + f(x-u)]\mathrm{d}u$$

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$.

a) À partir des expressions $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t$ et analogues pour b_k la somme partielle de la série de Fourier de f : $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ s'écrit :

a) Soit $S_n(x)$ la somme partielle d'ordre n au point x :

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

D'après le calcul des sommes de Fourier effectué dans l'exemple **3**, on a :

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\mathrm{d}u\ ,\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u = 1.$$

Par différence, on obtient : $S_n(x) - \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] =$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\left[f(x+u)-f(x+0)-f(x-u)-f(x-0)\right]\mathrm{d}u.$$

f de classe C^1 par morceaux donne l'existence des limites :

$$\alpha = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{1}{u}\left[f(x+u)-f(x+0)\right] \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{1}{u}\left[f(x-u)-f(x-0)\right].$$

La fonction $g\ :\ [0,\pi] \to \mathbb{C},\quad g(x) = \dfrac{f(x+u)-f(x+0)+f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}$,

si $u \neq 0$ et $g(0) = \alpha + \beta$, est alors continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

Le lemme de Lebesgue [32] appliqué à :

$$S_n(x) - \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(u)\sin\left[(2n+1)\frac{u}{2}\right]\mathrm{d}u$$

s'écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) - \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] = 0$. C'est le résultat souhaité.

[32] Étant donnés a, b réels ($a<b$) et $f \in \mathcal{M}([a,b],\mathbb{C})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$. Pour une démonstration, voir le chapitre **4**, Exemple **1**.

2. Convergence normale

Théorème 7

Soit $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Alors la série de Fourier de f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la fonction f.

Le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que, dans ce cas, f est la somme de sa série de Fourier. [33]

Pour f continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, il existe une unique fonction de $\mathcal{D}$ vérifiant $h(x)=f'(x)$ en tout point où f est dérivable et :

$$h(x) = \frac{1}{2}\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{1}{u}\left[f(x+u)-f(x)+f(x-u)-f(x)\right] \text{ sinon.}$$

D'après la propriété **10** on a alors : $c_n(f) = \frac{1}{in}c_n(h)$, ce qui est le terme général d'une série absolument convergente, (voir l'exemple **2**).

La convergence normale de la série de Fourier en résulte d'après le théorème **4**.

[33] On peut prouver ce résultat sans le théorème de Dirichlet. En effet, ayant montré la convergence normale donc uniforme sur $\mathbb{R}$, en appelant S la fonction somme, le théorème **5** donne que, quel que soit $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f)=c_n(S)$ donc $\int_0^{2\pi}(f(x)-S(x))e^{-inx}\mathrm{d}x=0$, et par application du deuxième théorème de Weierstrass il en résulte $f=S$ (cf. chapitre 3, exemple 4).

3. Convergence quadratique. Formule de Parseval

Théorème 8

Pour tout $f \in D$, la suite $S_n(f)$ des sommes partielles de sa série de Fourier, converge vers f dans $(D, \|\cdot\|_D)$. C'est à dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - S_n(f)\|_D = 0$.

Soit f un élément de D. Compte tenu de ce que $(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormale de $E_n = \mathrm{Vect}\,(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ et que $c_k(f) = \langle e_k \mid f \rangle$ pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$:

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

est le projeté orthogonal de f sur E_n. (34)

(34) Cf. Algèbre-Géométrie, chapitre 5.

D'après le théorème 3, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in E$, espace des polynômes trigonométriques, tel que $\|f - P\|_D \leqslant \varepsilon$.

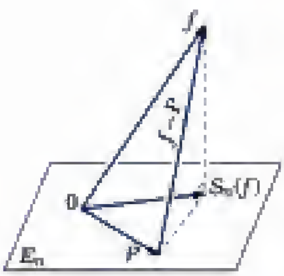
P étant élément de E, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P \in E_{n_0}$ et alors, pour tout $n \geqslant n_0$, on a encore $P \in E_n$. (35)

(35) Remarquer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subset E_{n+1}$ et donc $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Puisque $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur E_n, on sait que :

$$\|f - S_n(f)\|_D = \min_{u \in E_n} \|f - u\|_D.$$

En conséquence, pour $n \geqslant n_0$, on obtient $\|f - S_n(f)\|_D \leqslant \|f - P\|_D \leqslant \varepsilon$ ce qui assure la conclusion.



Remarque

On dit que la série de Fourier de f converge vers f en **moyenne quadratique** ou pour la norme de la moyenne quadratique.

Théorème 9

Égalité de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux. Alors les séries de termes généraux $|a_n|^2$, $|b_n|^2$, $|c_n|^2$, $|c_{-n}|^2$ sont convergentes (36) et :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

(36) On le sait depuis le corollaire 1 du théorème 2 : inégalité de Bessel.

On conserve les notations du théorème précédent. Puisque $f - S_n(f)$ est orthogonal à E_n, le théorème de Pythagore donne :

$$\|f\|_D^2 = \|S_n(f)\|_D^2 + \|f - S_n(f)\|_D^2,$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - S_n(f)\|_D = 0$ donne $\lim\limits_{n \to +\infty} \|S_n(f)\|_D^2 = \|f\|_D^2$.

En remarquant que $\|S_n(f)\|_D^2 = \sum\limits_{k=-n}^{n} |c_k|^2$, on en déduit :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \|f\|_D^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

La deuxième formule résulte alors de $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$, relations qui donnent :

$$|a_n|^2 = a_n \overline{a_n} = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 + c_n \overline{c_{-n}} + c_{-n} \overline{c_n}$$

$$\text{et} \quad |b_n|^2 = b_n \overline{b_n} = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 - c_n \overline{c_{-n}} - c_{-n} \overline{c_n}.$$

4. Développement des fonctions T-périodiques

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique et continue par morceaux, la fonction $g : x \mapsto f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$ est 2π-périodique et continue par morceaux.

Les coefficients de Fourier de f sont par définition ceux de g :

$$c_n(f) = c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)e^{-\frac{2i\pi}{T}nu}\mathrm{d}u.$$

$$a_n(f) = a_n(g) = \frac{2}{T}\int_0^T f(u)\cos\frac{2\,\pi\,nu}{T}\mathrm{d}u.$$

$$b_n(f) = b_n(g) = \frac{2}{T}\int_0^T f(u)\sin\frac{2\,\pi\,nu}{T}\mathrm{d}u.$$

Dans les conditions du théorème de Dirichlet, on obtient, pour tout x réel :

$$\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{\frac{2i\pi nx}{T}}$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos\frac{2\,\pi\,nx}{T} + b_n(f)\sin\frac{2\,\pi\,nx}{T}.$$

Exemple 4 Soit $f \in \mathcal{D}$ définie par $\quad f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}\quad$ sur $]0, 2\,\pi\,[$.

a) Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

b) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

a) Montrons que f est impaire.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus 2\,\pi\,\mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in]0, 2\,\pi\,[$ tels que $x = 2k\,\pi + y$ donc :

$$f(x) = f(y) = \frac{\pi - y}{2}.$$

On a de plus, $-x = -2(k+1)\,\pi + 2\,\pi - y \quad$ avec $\quad 2\,\pi - y \in]0, 2\,\pi\,[$, donc :

$$f(-x) = f(2\,\pi - y) = -\frac{\pi - y}{2}.$$

Ainsi $\quad f(-x) = -f(x) \quad$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\,\pi\,\mathbb{Z}$.

En conséquence, on a $f(0^+) = -f(0^-)$ donc $f(0) = \dfrac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = 0$ et par périodicité $f(x) = 0$ pour $x \in 2\,\pi\,\mathbb{Z}$.

- Comme f est impaire : $\quad a_n(f) = 0 \;\; (n \in \mathbb{N}) \quad$ et $\quad b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx\mathrm{d}x.$

Une intégration par parties donne pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n(f) = -\frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x \;\; ; \;\; b_n(f) = \frac{1}{n}.$$

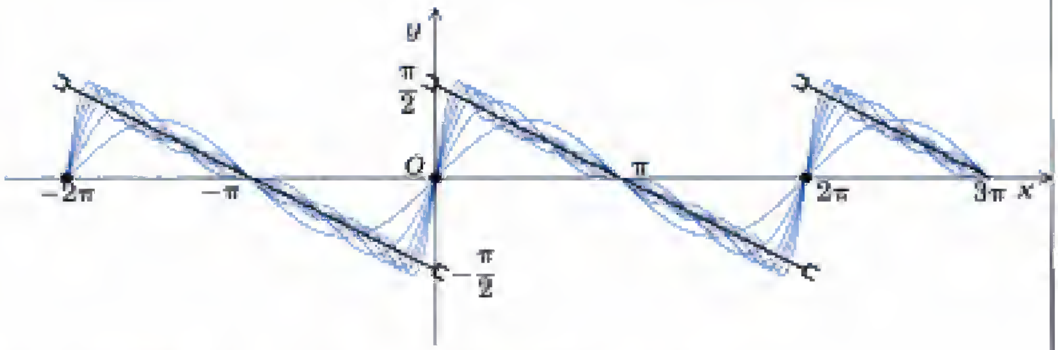
La série de Fourier de f a donc pour terme général $\quad u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \dfrac{\sin nx}{n}.$

b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et régularisée ✎[37] donc, d'après le théorème de Dirichlet elle est somme de sa série de Fourier.

✎[37] pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x^+)+f(x^-)\big)$.

En particulier on obtient : $\qquad \forall x \in]0, 2\,\pi\,[,\quad \dfrac{\pi - x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}.$

Donnons la représentation graphique sur $[-2\pi, 3\pi]$ de f ainsi que des premières sommes partielles de sa série de Fourier.



Exemple 5 Soit $f \in D$ définie par $\quad f(x) = x(2\pi - x) \quad$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$.

Développer f en série de Fourier. En déduire les sommes des séries :

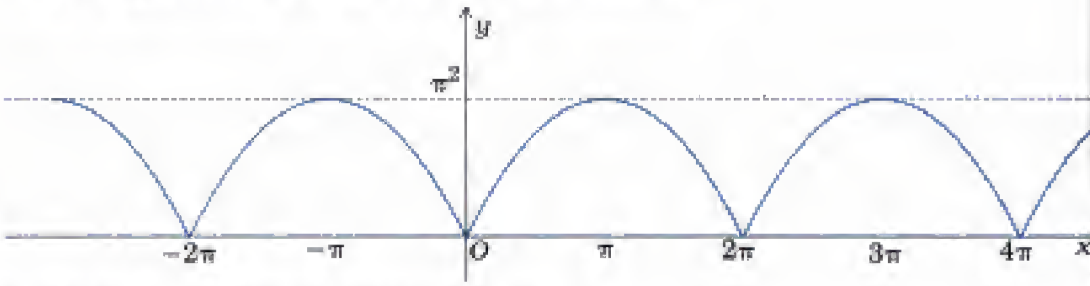
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Une fonction de D est caractérisée par sa restriction à $]0, 2\pi[$.

Ici $\quad f(0) = f(0^+) = f(2\pi^-) = f(0^-) = 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

La restriction de f à $[0, 2\pi]$ est C^∞, donc f est C^∞ par morceaux.

La courbe représentative de f est formée d'arcs de paraboles :



- Calculons les coefficients trigonométriques de f.

f est paire, donc $b_n = 0 \; (n \in \mathbb{N}) \quad$ et $\quad a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(2\pi - x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\pi x^2 - \frac{x^3}{3}\right] \quad a_0 = \frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(2\pi - x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left[x(2\pi - x)\sin nx\right]_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi}\left[(\pi - x)\cos nx\right]_0^\pi + \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nx\,\mathrm{d}x \quad a_n = -\frac{4}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

- Développement en série de Fourier de f

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet prouve que f est somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$ ✎ (38)

✎ (38) La convergence normale sur $\mathbb{R}$ est évidente.

- Calcul des sommes de séries.

Exploitons l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \text{ donne } \frac{8\pi^4}{15} = \frac{4\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4},$$

d'où :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Pour $p > 1$, nous utiliserons les égalités :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^p}+\frac{1}{(2k)^p}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{2^p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$$

pour obtenir $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^p}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$.

Ainsi, avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.

La somme de la série de Fourier de f au point $x = 0$ donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\quad\text{et donc}\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

De même, $x = \pi$ donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

Exemple 6 Déduire de l'exemple précédent les sommes de séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}\ ,\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}\ ,\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

La convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de Fourier de f permet, par intégration terme à terme, de définir une fonction g de D par :

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\int_0^x\left(f(t)-\frac{2\pi^2}{3}\right)\mathrm{d}t=-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^3}.$$

g est somme d'une série trigonométrique normalement convergente sur $\mathbb{R}$ qui donne directement les coefficients de Fourier trigonométriques de g : $a_n(g)=0$, $b_n(g)=-\dfrac{4}{n^3}$, (cf. théorème 5)

Le calcul donne l'expression de g sur $[0, 2\pi]$: $g(x)=-\dfrac{1}{3}\left(x^3-3\,\pi\,x^2+2\,\pi^2\,x\right)$.

Le choix de $x=\dfrac{\pi}{2}$ donne $\displaystyle g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^3}{8}=-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}=-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

d'où la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

L'égalité de Parseval appliquée à g s'écrit : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{1}^{+\infty}b_n^2(g)$.

Donc, avec $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{9}(x^3-3\,\pi\,x^2+2\,\pi^2\,x)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi^6}{9}\int_0^1(2u^3-3u^2+u)^2\mathrm{d}u$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{2\pi^6}{9}\int_0^1(4u^6-12u^5+13u^4-6u^3+u^2)\mathrm{d}u=\frac{2\pi^6}{9}\cdot\frac{1}{210}$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}\quad\text{et}\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}.$$

Méthodes

L'essentiel

I. Développement en série de Fourier

✔ **Si l'on veut** prouver qu'une série trigonométrique est identique à la série de Fourier de sa somme

- **on peut** penser à contrôler qu'elle est normalement convergente pour conclure avec le théorème 5.

✔ **Si l'on veut** développer une fonction f en série de Fourier,

- **on peut** observer qu'un développement en série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $\rho > 1$ donne, lorsqu'on remplace z par $e^{i\theta}$, une série trigonométrique normalement convergente.
Il faudra ensuite prouver, grâce à la remarque précédente, que cette série est bien la série de Fourier de f.
$\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 1.

II. Application aux équations différentielles

✔ **Si l'on veut** trouver des solutions périodiques d'une équation différentielle (E)

- **on peut** penser à rechercher les solutions développables en séries de Fourier.
$\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 2.

II. Application aux équations différentielles

Ex. 2

Montrer que $y'' + y\,e^{it} = 0$ (E) admet des solutions de période 2π. Préciser l'ensemble de ces solutions.

Indications

Toute solution 2π-périodique de (E) est développable en série de Fourier.

Solution

On sait que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. En conséquence, si f est une solution 2π-périodique de (E), elle est de classe C^∞ donc développable en série de Fourier ainsi que toutes ses dérivées, et de plus tous ces développements sont normalement convergents.

Dans cette situation, le développement de f'' se déduit de celui de f par dérivation terme à terme, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int},\quad f''(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2 c_n(f)e^{int}.$$

Alors f solution de (E) s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(c_{n-1}(f) - n^2 c_n(f)\right)e^{int} = 0.$$

Ce dernier développement est encore normalement convergent donc ses coefficients sont les coefficients de Fourier de sa somme. Celle-ci étant la fonction nulle, on obtient : $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_{n-1}(f) - n^2 c_n(f) = 0$.

On en déduit pour tout $n \geqslant 0$, $c_n(f) = \dfrac{c_0(f)}{(n!)^2}$, et pour tout $n < 0$, $c_n(f) = 0$, donc $f(t) = \lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{(n!)^2}$ où on a posé $\lambda = c_0(f)$.

Réciproquement, posons $f_0 : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{(n!)^2}$.

Il s'agit là d'une série de fonctions $\sum u_n$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, de terme général

$$u_n : t \mapsto \frac{e^{int}}{(n!)^2}.$$

On a alors

$$\| u_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{(n!)^2},\quad \| u_n' \|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{n!(n-1)!} \text{ et } \| u_n'' \|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{\left((n-1)!\right)^2},$$

donc ces trois séries convergent normalement sur $\mathbb{R}$, ce qui assure que f_0 est de classe C^2 avec $\forall t \in \mathbb{R},\ f_0''(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{e^{int}}{\left((n-1)!\right)^2}$ donc :

$$f_0''(t) = -f_0(t)e^{it}.$$

Ainsi f_0 est effectivement solution 2π-périodique de (E) et par linéarité, il en est de même pour toute fonction λf_0.

L'ensemble des solutions 2π-périodiques de (E) est la droite vectorielle dirigée par f_0.

Commentaires

Conférer à ce propos le chapitre 8 dans lequel on verra entre autre que puisque $t \mapsto e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$, toute solution maximale de (E) est définie sur $\mathbb{R}$.

D'autre part la relation $f''(t) = -f(t)e^{it}$ montre que si une solution f de (E) est de classe C^n alors elle est de classe C^{n+2}, et on établit ainsi par récurrence la classe C^∞.

C'est encore le théorème 5.

On a ainsi trouvé par conditions nécessaires les éventuelles solutions 2π-périodiques de (E).

La périodicité est évidente.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

On donne a réel non nul et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par $\forall x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = e^{ax}$.

1) Étudier le développement de f en série de Fourier.

2) Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}$.

3) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex. 2

Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin^2 nx.$$

Ex. 3

1) Développer en série de Fourier f et g :
$f(x) = e^{\cos x} \cos(\sin x)$, $g(x) = e^{\cos x} \sin(\sin x)$.

2) En déduire $I_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(nt - \sin t)\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(nt + \sin t)\mathrm{d}t$.

Ex. 4

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Calculer :

$$I_p = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ipx}}{z - e^{ix}} \mathrm{d}x, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Ex. 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et 2π-périodique.

Montrer que si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls alors f est la fonction nulle.

Ex. 6

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 2π-périodique, telle que :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que $\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Ex. 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-périodique, nulle sur $[1, 2]$ et coïncidant avec $x \mapsto \cos \pi x$ sur $]0, 1[$.

Étudier la série de Fourier de f et écrire les relation dues aux théorèmes de Dirichlet et Parseval.

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 8

Trouver les fonctions $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodiques pour lesquelles il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M\lambda^n.$$

Ex. 9

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in]0, 1]$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|^{\alpha}.$$

Montrer que $c_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^{\alpha}}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Ex. 10

1) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f, dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ est définie par $f(x) = x^4$.

2) En déduire $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^8}$.

Ex. 11

Donner le développement en série de Fourier de $f : \theta \mapsto \frac{1}{5 + 4\cos\theta}$; en déduire $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{5 + 4\cos\theta} \mathrm{d}\theta$.

Ex. 12

On donne l'équation différentielle :

$$(E) \ : \quad y'' + y = |\sin x|.$$

Trouver la solution qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
(On pourra utiliser le développement en série de Fourier de $x \mapsto |\sin x|$.)

Ex. 21

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|x+2n\pi|}$.

1) Étudier l'ensemble de définition, la continuité et la périodicité de f.

2) Montrer que f est développable en série de Fourier.

3) Calculer les coefficients de Fourier de f sous forme réduite et écrire ce développement.

Ex. 22

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-k)^2}{2t}}$ $(t > 0)$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est 1-périodique et développable en série de Fourier.

Calculer les coefficients de Fourier de f.

Indications

Ex. 8

Exprimer $c_p(f^{(n)})$ en fonction de $c_p(f)$.

Ex. 9

Utiliser la propriété 7 pour exprimer $c_n(f)$ en fonction de $f(x) - f(x+h)$.

Ex. 10

Déduire du calcul des $a_n(f)$ une fonction h telle que $a_n(h) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ puis appliquer la formule de Parseval.

Ex. 11

Développer $f(\theta)$ en séries entières des variables :

$$\frac{1}{2}e^{i\theta} \text{ et } \frac{1}{2}e^{-i\theta}.$$

Ex. 12

Trouver une solution particulière g développable en série de Fourier et telle que g'' s'obtienne par dérivation terme à terme de la série de Fourier de g.

Ex. 13

1) Considérer d'abord le cas où $x \in [0, 2\pi]$ et appliquer le théorème de convergence quadratique.

Ex. 14

Penser à linéariser $\sin^3 nx$.

Ex. 15

Éliminer les cas particuliers $a = 1$ et $a = -1$. Pour $-1 < a < 1$, développer $f'(x)$ en séries entières des variables ae^{ix} et ae^{-ix}.

Ex. 16

1) Rechercher f impaire, 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad b_n(f) = \frac{1}{n}.$$

Ex. 17

Toute solution éventuelle est développable en série de Fourier. Prouver que les développements de $f(2x)$ et $2\sin x\, f'(x)$ s'identifient terme à terme.

Ex. 18

Remarquer que : $\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx}$.

En découpant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en :

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}} [2p\pi, 2(p+1)\pi],$$

faire apparaître une série de Fourier.

Ex. 19

2) Pour $x \in]-\pi, \pi[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ s'intègre terme à terme sur $[0, x]$.

Ex. 20

2) Considérer $f(t) - \left(\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{12}\right)$ pour montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Ex. 21

2) Considérer les restrictions aux intervalles :

$$[2k\pi, 2(k+1)\pi],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ex. 22

Calculer $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2i\pi ux}\,du$ au moyen d'une équation différentielle.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) La fonction f est clairement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur tout intervalle $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$. Comme de plus il existe $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = a$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\pi\\ x<2\pi}} f'(x) = ae^{2\pi a}$, f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa fonction somme est la régularisée de f.

La condition $a \neq 0$ donne que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a - in \neq 0$. Les coefficients de Fourier s'écrivent donc :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax-inx}\mathrm{d}x = \frac{a+in}{2\pi\left(a^2+n^2\right)}\left(e^{2\pi a}-1\right).$$

On en déduit $\quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ f(x) = \dfrac{e^{2\pi a}-1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2a\cos nx}{a^2+n^2} - \dfrac{2n\sin nx}{a^2+n^2}\right],$

c'est-à-dire $\quad \forall x \in 2\pi\mathbb{Z},\ \dfrac{1+e^{2\pi a}}{2} = \dfrac{e^{2\pi a}-1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{a} + 2a\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{a^2+n^2}\right].$

2) Pour $x = 0$, la formule précédente donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1} - \frac{1}{2a^2}.$

3) La série de fonctions de terme général $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+n^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (car $\| u_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n^2}$), sa fonction somme est donc continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{a\to 0}\frac{\pi a\left(e^{2\pi a}+1\right) - \left(e^{2\pi a}-1\right)}{2a^2\left(e^{2\pi a}-1\right)}.$$

Le développement limité $e^{2\pi a} = 1 + 2\pi a + 2\pi^2 a^2 + \dfrac{4\pi^3 a^3}{3} + o\left(a^3\right)$ donne alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Ex. 2

$f : x \mapsto |\sin x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux, donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge en tout point x de $\mathbb{R}$, sa somme étant égale à $f(x)$.

f est paire donc $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ b_n(f) = 0 \quad , \quad a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$

$a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{\pi} \quad , \quad a_1(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin 2x\,\mathrm{d}x = 0 \quad$ et, pour $n \geq 2$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right).$$

Finalement, pour n pair, $n = 2p$: $a_{2p}(f) = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2p+1} - \dfrac{1}{2p-1}\right)$, pour n impair, $n = 2p+1$: $a_{2p+1}(f) = 0.$

Ainsi $\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad |\sin x| = \dfrac{2}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n-1}\right)\cos 2nx,$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\sin^2 nx,$$

donc $\ |\sin x| = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin^2 nx}{(2n+1)(2n-1)}, \quad$ et enfin $\ |\sin x| = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{4n^2-1}.$

Ex. 3

1) Formons $h(x) = f(x) + ig(x) = e^{\cos x + i \sin x} = e^{e^{ix}}$.

Sachant que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, il vient $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$, d'où :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n!}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$$

Posons $u_n : x \mapsto \frac{\cos nx}{n!}$ et $v_n : x \mapsto \frac{\sin nx}{n!}$, on obtient $\| u_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \| v_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{n!}$ donc les deux séries Σu_n et Σv_n convergent normalement sur $\mathbb{R}$, et dans ces conditions, elles sont identiques aux séries de Fourier de leurs sommes (d'après le théorème 5).

On a donc ainsi obtenu les développements de f et g en séries de Fourier.

2) Écrivons maintenant les coefficients de Fourier de f et g.

Puisque f est paire et g impaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et $a_n(g) = 0$.

D'autre part :

$$2\pi\, a_n(f) = 2 \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) \cos nt \,dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\big(\cos(nt + \sin t) + \cos(nt - \sin t)\big)dt,$$

donc $a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\big(I_n + J_n\big)$.

De même :

$$2\pi\, b_n(f) = 2 \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) \sin nt \,dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\big(\cos(nt - \sin t) - \cos(nt + \sin t)\big)dt,$$

donc $b_n(f) = \frac{1}{2\pi}\big(I_n - J_n\big)$.

D'après le **1)**, il en résulte pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n + J_n = 2\pi\, a_n(f) = \frac{2\pi}{n!}, \qquad I_n - J_n = 2\pi\, b_n(f) = \frac{2\pi}{n!}, \quad \text{donc } I_n = \frac{2\pi}{n!}, \; J_n = 0.$$

D'autre part, $I_0 + J_0 = 4\pi$ et $I_0 - J_0 = 0$ donne $I_0 = J_0 = 2\pi$.

Ex. 4

Posons pour tout x réel, $f(x) = \frac{1}{z - e^{ix}}$. Puisque $|z| > 1$, il vient $f(x) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{z^{n+1}}$.

Ainsi, f est la somme d'une série trigonométrique normalement convergente sur $\mathbb{R}$ car $\left|\frac{e^{inx}}{z^{n+1}}\right| = \frac{1}{|z|^{n+1}}$.

Cette série est donc identique à la série de Fourier de f (application du théorème 5).

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $c_n(f) = \frac{1}{z^{n+1}}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}_-^*$, $c_n(f) = 0$. Donc puisque $I_p = 2\pi\, c_{-p}(f)$, on a finalement :

$$I_p = 2\pi\, z^{p-1} \text{ si } p \leq 0 \quad \text{et} \quad I_p = 0 \text{ si } p > 0.$$

Remarque : un calcul direct s'écrit $I_p = \frac{1}{z}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i(n+p)x}}{z^n} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n}\int_0^{2\pi} e^{i(n+p)x}dx$ où l'intégration terme à terme est justifiée par la convergence normale de la série de fonction de terme général $x : \mapsto \frac{e^{i(n+p)x}}{z^n}$.

Ex. 5

Le théorème de Parseval donne $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,dt = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2} = 0$.

La fonction $|f|^2$ étant continue positive, cette égalité donne que f est nulle sur $[0, 2\pi]$ donc aussi sur $\mathbb{R}$ d'après la 2π-périodicité.

Ex. 6

f étant de classe C^1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f') = nb_n(f)$, $b_n(f') = -na_n(f)$ (corollaire de la propriété 9).

f et f' étant continues, l'égalité de Parseval donne :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n^2(f) + b_n^2(f)\right] \quad \left(\text{car } a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0\right).$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0^2(f')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n^2(f') + b_n^2(f')\right].$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left[a_n^2(f) + b_n^2(f)\right], \quad \left(\text{car } a_0(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\big(f(2\pi) - f(0)\big) = 0\right).$$

Il est alors clair que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t$

- **Cas d'égalité**

La relation $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(n^2 - 1)\left[a_n^2(f) + b_n^2(f)\right] = 0 \quad \text{donc} \quad \forall n \geqslant 2,\ a_n(f) = b_n(f) = 0.$$

f étant de classe C^1, elle est égale à la somme de sa série de Fourier et on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\right],$$

soit $\qquad f(x) = a_1(f)\cos x + b_1(f)\sin x.$

Ainsi, l'égalité $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2 = \int_0^{2\pi} f'^2$ nécessite f de la forme $x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$.

La réciproque est évidente : on a alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2 = \pi(\lambda^2 + \mu^2)$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'^2 = \pi(\lambda^2 + \mu^2)$.

Finalement, l'égalité est obtenue si et seulement si f est de la forme $\lambda\cos + \mu\sin$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Ex. 7

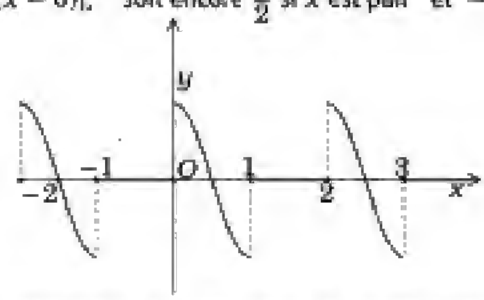
La fonction f est de classe C^1 sur tout intervalle $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, et en tout point $n \in \mathbb{Z}$, f et f' admettent des limites à droite et à gauche. Il en résulte que f est de classe C^1 par morceaux sur R.

D'après le théorème de Dirichlet, en tout point x où f est continue, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a donc :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cos(\pi nx) + b_n\sin(\pi nx).$$

Aux points de discontinuité, c'est-à-dire pour $x \in \mathbb{Z}$, la somme de la série est :

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right], \quad \text{soit encore } \frac{1}{2} \text{ si } x \text{ est pair} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \text{ si } x \text{ est impair.}$$



Rappelons que, pour une fonction T-périodique, les coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x \quad , \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x.$$

Synthèse : tout polynôme trigonométrique f s'écrit $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{p=-n_0}^{n_0} \alpha_p e^{ipx}$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{p=-n_0}^{n_0} (ip)^n \alpha_p\, e^{ipx}$ d'où $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant n_0^n \displaystyle\sum_{p=-n_0}^{n_0} |\alpha_p|$ ce qui montre que f est solution du problème avec $\lambda = n_0$ et $M = \displaystyle\sum_{p=-n_0}^{n_0} |\alpha_p|$.

La condition annoncée est donc caractéristique des polynômes trigonométriques.

Ex. 9

Pour tout h réel on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x+h)\mathrm{d}x = e^{inh} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\mathrm{d}x$ (voir la propiété 7), il en résulte :

$$\left(1 - e^{inh}\right) c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \left(f(x) - f(x+h)\right)\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de $|f(x) - f(x+h)| \leqslant M\,|h|^{\alpha}$, on en déduit $\left|1 - e^{inh}\right| |c_n(f)| \leqslant M\,|h|^{\alpha}$,

et donc, pour $e^{inh} \neq 1$, $|c_n(f)| \leqslant M \dfrac{|h|^{\alpha}}{\left|\sin \frac{nh}{2}\right|}$.

Pour $h = \dfrac{\pi}{n}$, on obtient ainsi $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{M\pi^{\alpha}}{|n|^{\alpha}}$ d'où la conclusion.

Ex. 10

1) L'application $f|_{[-\pi,\pi]}$ est continue et on a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\pi\\x>-\pi}} f(x) = \pi^4$. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

De même $f|_{[-\pi,\pi]}$ étant de classe C^1 avec $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f'(x) = 4\pi^3$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\pi\\x>-\pi}} f'(x) = -4\pi^3$, f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, il est clair que f est paire donc $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n(f) = 0$. Ainsi, le théorème de Dirichlet donne :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos nx$ où $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 \cos nx\mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N})$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quatre intégrations par parties donnent successivement :

$$a_n(f) = \frac{8}{\pi\, n}\int_0^{\pi} -x^3 \sin nx\mathrm{d}x \qquad (1)$$

$$a_n(f) = \frac{8\,\pi^2\,(-1)^n}{n^2} - \frac{24}{\pi\, n^2}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\mathrm{d}x \qquad (2)$$

$$a_n(f) = \frac{8\,\pi^2\,(-1)^n}{n^2} + \frac{48}{\pi\, n^3}\int_0^{\pi} x \sin x\mathrm{d}x \qquad (3)$$

$$a_n(f) = \frac{8\,\pi^2\,(-1)^n}{n^2} - \frac{48(-1)^n}{n^4} \qquad (4)$$

D'autre part, on a directement $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^4\mathrm{d}x = \dfrac{2\pi^4}{5}$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8(-1)^n}{n^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right)\cos nx\,.$$

Comme pouvait le laisser prévoir le théorème 7, on vérifie aisément que ce développement est normalement convergent sur $\mathbb{R}$.

2) Introduisons la fonction g, 2π-périodique, dont la restriction à $[-\pi,\pi]$ est définie par $g(x)=x^2$. Cette fonction est paire et continue sur $\mathbb{R}$ et en comparant (2) et (4), on obtient :

$$\frac{24}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{48(-1)^n}{n^4}\quad\text{donc}\quad a_n(g)=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Alors la relation (4) s'écrit $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n(f)=2\pi^2a_n(g)-48\frac{(-1)^n}{n^4}$, soit aussi $a_n(f-2\pi^2g)=48\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ par linéarité de l'application $h\mapsto a_n(h)$ sur l'espace des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux.

La fonction $h=\frac{1}{48}(f-2\pi^2g)$ est paire continue sur $\mathbb{R}$ et sa restriction à $[-\pi,\pi]$ est définie par :

$$h(x)=\frac{x^4-2\pi^2x^2}{48}.$$

Il reste à calculer $a_0(h)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^4-2\pi^2x^2}{48}\mathrm{d}x=-\frac{7\pi^4}{2^3\cdot3^2\cdot5}=-\frac{7\pi^4}{360}$,

puis on applique l'égalité de Parseval à h :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h^2&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^8-4\pi^2x^6+4\pi^4x^4}{2^8\cdot3^2}\mathrm{d}x=\frac{107\pi^8}{2^8\cdot3^4\cdot5\cdot7}=\frac{107\pi^8}{725760}\\&=\frac{a_0^2(h)}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2(h)=\frac{7^2\pi^8}{2^8\cdot3^4\cdot5^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7}(5\cdot107-7^3)=\frac{192\pi^8}{2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7}=\frac{2^6\cdot3\pi^8}{2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7}=\frac{\pi^8}{9450}$.

Ex. 11

La fonction f est 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, dans ces conditions on sait que f est somme de sa série de Fourier, et que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a $f(\theta)=\dfrac{1}{5+2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}=\dfrac{e^{i\theta}}{2e^{2i\theta}+5e^{i\theta}+2}$, donc avec $x=e^{i\theta}$:

$$f(\theta)=\frac{x}{2x^2+5x+2}=\frac{x}{(x+2)(2x+1)}.$$

Décomposons la fraction précédente en éléments simples : $\dfrac{x}{(x+2)(2x+1)}=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2x+1}$

Il s'ensuit que $f(\theta)=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}e^{i\theta}}-\dfrac{1}{6}\dfrac{e^{-i\theta}}{1+\frac{1}{2}e^{-i\theta}}$.

Avec, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, $\dfrac{1}{1+z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nz^n$, on obtient :

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}e^{in\theta}-\frac{e^{-i\theta}}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}e^{-in\theta}\\&=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^ne^{in\theta}}{2^n}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-(n+1)i\theta}}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\cos n\theta\qquad(1)\end{aligned}$$

Comme la série précédente converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $\left|\dfrac{\cos n\theta}{2^{n-1}}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$, c'est la série de Fourier de f (cf. théorème 5).

Ainsi les séries $\sum u_n$, $\sum u_n'$ et $\sum u_n''$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ et, compte tenu du fait que, pour tout n, u_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que g est de classe C^2 avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2n\sin 2nx}{(1-4n^2)^2},$$

$$g''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4n^2\cos 2nx}{(1-4n^2)^2},$$

et d'après le calcul préliminaire, g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

- Solution vérifiant $y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$

Avec $\quad y = \lambda\cos x + \mu\sin x + g(x)$:

$$\begin{array}{rclll} y(0) & = & 0 & \text{donne} & \lambda + g(0) = 0, \\ y'(0) & = & 0 & \text{donne} & \mu + g'(0) = 0. \end{array}$$

On a donc $\quad \lambda = -\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2}$.

Or la formule de Parseval avec le développement de $f\ :\ x \mapsto |\sin x|$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{8}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{\pi^2(1-4n^2)^2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = 1 \end{aligned}$$

d'où
$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \lambda = -\frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, il est clair que $g'(0) = 0$.

Finalement, la solution cherchée est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad y(x) = -\frac{\pi}{4}\cos x + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{(1-4n^2)^2}.$$

Ex. 13

1) - Envisageons d'abord le cas où $x \in [0, 2\pi]$.

On sait (voir théorème 8) que dans l'espace D muni de la norme de la moyenne quadratique la suite $(S_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de Fourier de f, converge vers f :

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\|f - S_n\|_D = 0.$$

Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on a les majorations successives :

$$\left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x S_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f(t) - S_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi}|f(t) - S_n(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{2\pi}|f(t) - S_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(2\pi\int_0^{2\pi}|f(t) - S_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

Donc $\left|\displaystyle\int_0^x f - \int_0^x S_n\right| \leqslant \sqrt{2\pi}\,\|f - S_n\|_D$ et il résulte du rappel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x S_n = \int_0^x f$.

Puisque $\quad \displaystyle\int_0^x S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\int_0^x e^{ikt}\mathrm{d}t$, ce résultat se lit encore :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\int_0^x e^{int}\mathrm{d}t = \int_0^x f.$$

- Soit maintenant x réel quelconque.

Alors avec $p = E\left(\frac{x}{2\pi}\right)$, $x = 2p\pi + x'$, où $x' \in [0, 2\pi[$. f étant 2π-périodique, on a :

$$\int_0^x f = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} + \int_{2p\pi}^{x} f = p\int_0^{2\pi} f + \int_0^{x'} f = 2p\pi\, c_0(f) + \int_0^{x'} f.$$

L'étude du premier cas donne $\displaystyle\int_0^{x'} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \int_0^{x'} e^{int}\mathrm{d}t$ donc :

$$\int_0^x f = 2p\pi\, c_0(f) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \int_0^{x'} e^{int}\mathrm{d}t.$$

En constatant que $\displaystyle\int_0^{x'} e^{int}\mathrm{d}t = \int_0^{x} e^{int}\mathrm{d}t$ pour $n \neq 0$ et que $\displaystyle 2p\pi + \int_0^{x'} \mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x$,

on conclut à $\displaystyle\int_0^x f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \int_0^{x} e^{int}\mathrm{d}t.$

<u>Remarque</u> : ce résultat reste vrai avec f 2π-périodique et continue par morceaux car la régularisée $\tilde{f}$ est élément de D et on a $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = c_n(\tilde{f})$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x f = \int_0^x \tilde{f}$.

2) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que : $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 2\pi[, f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, est élément de D et est somme de sa série de Fourier, d'après le théorème de Dirichlet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

En appliquant le résultat du 1), on obtient donc : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{\sin nt}{n}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos nx}{n^2}$

donc, pour $x \in [0, 2\pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4}.$

3) La formule précédente au point $x = \pi$ donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on en déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Ex. 14

1) Avec $u_n : x \mapsto \dfrac{\sin^3 nx}{n!}$, on a $u_n(x) = \dfrac{3\sin nx}{4n!} - \dfrac{\sin 3nx}{4n!}$ donc,en posant $a_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{n!}$ et $b_n(x) = \dfrac{e^{3inx}}{n!}$,

on a $\quad u_n(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{3}{4}a_n(x) - \frac{1}{4}b_n(x)\right)$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on établit que les séries $\sum a_n^{(p)}$ et $\sum b_n^{(p)}$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même pour $\sum u_n^{(p)}$ et la fonction S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) $S(x) = \dfrac{3}{4}\mathrm{Im}\left(e^{e^{ix}} - 1\right) - \dfrac{1}{4}\left(e^{e^{3ix}} - 1\right)$ **(1)**, $S(x) = \dfrac{3}{4}e^{\cos x}\sin\left(\sin x\right) - \dfrac{1}{4}e^{\cos 3x}\sin\left(\sin 3x\right)$ **(2)**.

3) D'après (1), $S(x) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n!} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 3nx}{n!}.$

Ce développement est normalement convergent sur $\mathbb{R}$, c'est donc le développement de f en série de Fourier.

Ex. 15

- Si $a = 1$, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, 2π-périodique, et impaire. En posant pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $f(2k\pi) = 0$, on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et régularisée, elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier.

Sur $]0, 2\pi[$, on a $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

- Si $a = -1$, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, 2π-périodique, et impaire. En posant pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $f\big((2k+1)\pi\big) = 0$, on obtient encore une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et régularisée, elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier.

Sur $]-\pi, \pi[$ on a $f(x) = \dfrac{x}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$.

- Si $|a| < 1$, f est 2π-périodique, impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier.

Sachant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \dfrac{1}{n} a_n(f')$.

Le calcul donne $f'(x) = \dfrac{a\cos x - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}$, puis en posant $u = e^{ix}$,

$$f'(x) = \frac{au^2 - 2a^2u + a}{2\big(-au^2 + u + a^2u - a\big)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 - au)} + \frac{a}{2(u - a)}.$$

On en déduit, $f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n u^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{u^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos nx$.

La convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général $x \mapsto a^n \cos nx \cos px$ justifie l'intégration terme à terme et il vient :

$$a_p(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos nx \cos px \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos px \,\mathrm{d}x = a^p \text{ donc } b_p(f) = \frac{a^p}{p}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$, on a finalement :

$$\text{si } |a| < 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arctan} \frac{a\sin x}{1 - a\sin x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} \sin nx.$$

Ex. 16

1) Ce développement a déjà été rencontré à plusieurs reprises. Un jour d'oral par exemple, on pourrait considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ impaire et 2π-périodique telle que : $\forall x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$; et dire que, d'après le théorème de Dirichlet, celle-ci est développable en série de Fourier pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Supposons maintenant ne pas connaître ce résultat a priori. Il est visible que la somme cherchée, si elle existe (ce qui n'est pas acquis tant que l'on n'a pas étudié la convergence de la série), est une fonction impaire.

Recherchons alors f impaire, 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, dont la restriction à $]0, \pi[$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et prolongeable sur $[0, \pi]$ par une application de classe $\mathcal{C}^1$ également, et enfin telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \frac{1}{n} \quad (1).$$

Avec les contraintes imposées à f, on peut intégrer par parties, et la condition (1) devient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (-1)^{n+1} f(\pi^-) + f(0^+) + \int_0^\pi f'(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^\pi \cos nx \,\mathrm{d}x = 0$, $(n \geqslant 1)$, une solution évidente est obtenue pour f' constante et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$(-1)^{n+1} f(\pi^-) + f(0^+) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $f(\pi^-) = 0$ et $f(0^+) = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]0, \pi[$ puis, compte tenu de l'imparité et de la 2π-périodicité, $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]0, 2\pi[$, $f(0) = f(2\pi) = 0$.

Il reste alors à appliquer le théorème de Dirichlet à cette fonction f pour constater que la série proposée est bien convergente sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est f.

2) La fonction g est continue, affine par morceaux, le calcul donne $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(g) = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

Le théorème de Dirichlet donne $g(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$. On obtient la formule annoncée avec $g(1) = f(1)$.

3) La formule de Parseval appliquée à g donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(g)^2 = \frac{(\pi-1)^2}{6}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi-1)^2}{6}$.

Ex. 17

Si f est solution du problème, elle est développable en série de Fourier ainsi que sa dérivée f' et ces développements sont normalement convergents sur $\mathbb{R}$.

En posant $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, on a $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$,

$$\text{donc } 2\sin x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n\Big[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\Big] + na_n\Big[\cos(n+1)x - \cos(n-1)x\Big]$$

$$= -a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[(n-1)a_{n-1} - (n+1)a_{n+1}\Big]\cos nx + \Big[(n-1)b_{n-1} - (n+1)b_{n+1}\Big]\sin nx.$$

Si deux séries trigonométriques normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ ont même somme, elles sont identiques car la série différence est normalement convergente avec pour somme la fonction nulle. D'après le théorème 5, c'est la série de Fourier de la fonction nulle.

En conséquence, de $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2\sin x f'(x)$, on déduit $a_1 = -\dfrac{a_0}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(2n-1)a_{2n-1} - (2n+1)a_{2n+1} = a_n \qquad (2n-1)b_{2n-1} - (2n+1)b_{2n+1} = b_n$$
$$(2n-2)a_{2n-2} - 2na_{2n} = 0 \qquad (2n-2)b_{2n-2} - 2nb_{2n} = 0$$

puis, par récurrence, pour tout $n \geq 1$, $a_{2n} = 0,\ a_{2n+1} = 0,\ b_{2n} = 0,\ b_{2n+1} = 0$.

Ainsi en posant $\lambda = \dfrac{a_0}{2}$ et $\mu = b_1$, il reste $f(x) = \lambda(1 - \cos x) + \mu \sin x$.

Réciproquement, on vérifie que les fonctions $x \mapsto 1 - \cos x$, et $x \mapsto \sin x$ sont solutions du problème et donc que, par linéarité, il en est de même pour toute fonction $x \mapsto \lambda(1 - \cos x) + \mu \sin x$.
L'ensemble des solutions est donc le plan vectoriel engendré par les fonctions $1 - \cos$ et $\sin$.

Niveau 3

Ex. 18

1) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a $\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \dfrac{e^{i(2n+1)x} - e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix} - e^{-ix}} = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx}$.

La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ est donc prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, π-périodique et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leq 2n+1.$$

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}, \left|f_n(x)e^{-ax}\right| \leq (2n+1)e^{-ax}$ et donc que $x \mapsto f_n(x)e^{-ax}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui assure l'existence de I_n.

De plus, $I_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx} e^{-ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} e^{-\frac{au}{2}} \mathrm{d}u.$

À ce stade, introduisons l'application g, 2π-périodique, définie sur $[0, 2\pi[$ par $g(u) = e^{-\frac{au}{2}}$ et découpons $[0, +\infty[$ en $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} [2p\pi, 2(p+1)\pi]$ pour faire apparaître la série de Fourier de g.

On obtient ainsi $I_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku - \frac{au}{2}} \right) \mathrm{d}u.$

Le changement de variable $u = 2p\pi + v$ donne :

$$\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku - \frac{au}{2}} \mathrm{d}u = e^{-pa\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikv - \frac{av}{2}} \mathrm{d}v = 2\pi e^{-pa\pi} c_{-k}(g),$$

donc $I_n = \pi S_n \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-pa\pi} = \frac{\pi S_n}{1 - e^{-a\pi}}$ avec $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(g).$

g étant C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet s'applique :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{g(0^+) + g(0^-)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-a\pi}\right) \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{\pi}{2} \coth \frac{a\pi}{2}.$$

2) L'expression $I_n = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sum_{k=-n}^{n} e^{iku - \frac{au}{2}} \mathrm{d}u$ donne :

$$I_n = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{ik - \frac{a}{2}} \left[e^{iku - \frac{au}{2}} \right]_0^{+\infty} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{a - 2ik}.$$

D'où en regroupant les termes conjugués $I_n = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2a}{a^2 + 4k^2}.$

Puisque $\frac{2a}{a^2 + 4k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{2k^2}$, la série $\sum \frac{2a}{a^2 + 4k^2}$ converge et on a $\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + 4k^2}.$

En comparant au résultat trouvé initialement, on en déduit :

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + 4k^2} = \frac{\pi}{2} \coth \frac{a\pi}{2}, \text{ donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4k^2} = \frac{\pi}{4a} \coth \frac{\pi a}{2} - \frac{1}{2a^2}.$$

Remarque

En observant que la série de fonctions de terme général $u_k : a \mapsto \frac{1}{a^2 + k^2}$, $k \geqslant 1$, converge normalement sur R, on déduit de ce calcul que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{a \to 0} \left(\frac{\pi}{a} \coth \frac{\pi a}{2} - \frac{2}{a^2} \right)$$

et, avec un développement limité, on retrouve $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Ex. 19

f étant paire, nous avons : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n(f) = 0$ et $\pi a_n(f) = 2 \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{2a \sin \pi a}{a^2 - n^2}.$

f est de classe C^1 par morceaux, donc le théorème de Dirichlet s'applique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin \pi a}{\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2a \sin \pi a}{\pi (a^2 - n^2)} \cos nx \quad \textbf{(1.0)}$$

1) Pour $x = \pi$, le développement (1.0) donne $\quad \cot\pi\alpha = \dfrac{1}{\pi\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$, $\quad$ d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} \qquad (1)$$

(pour $x = \pi\alpha$, $\quad \alpha \notin \mathbb{Z}$ $\quad$ équivaut à $\quad x \notin \pi\mathbb{Z}$).

2) Pour tout $x \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, la formule (2) se lit :

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Introduisons la fonction φ définie par $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$.

φ est continue sur $]-\pi, \pi[$ et, avec $\varphi(0) = 1$, on voit que la formule (2) équivaut à :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \ \varphi(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \qquad (2')$$

On remarque que : $\quad \forall x \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}, \ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln\varphi(x)\big) = \cot x - \dfrac{1}{x}$, considérons donc la fonction ψ définie par $\psi(0) = 0$ et $\psi(x) = \cot x - \dfrac{1}{x}$ pour $x \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$. Un développement limité montre que ψ est continue en 0. Ainsi ψ est continue sur $]-\pi, \pi[$ et d'après le 1), on a :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \ \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

(car la somme de la série s'annule aussi en 0)

ψ apparaît donc comme somme, sur $]-\pi, \pi[$, de la série de fonctions de terme général $u_n : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$.

D'autre part, on voit facilement que cette série converge normalement donc uniformément sur $]-\pi, \pi[$, car

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \ \forall n \geqslant 2, \ |u_n(x)| \leqslant \frac{2\pi}{(n^2-1)\pi^2}.$$

En conséquence, on a : $\quad \forall x \in]-\pi, \pi[, \ \displaystyle\int_0^x \psi(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x u_n(t)\mathrm{d}t$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \ \ln\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2\pi^2 - x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Il en résulte : $\quad \forall x \in]-\pi, \pi[, \ \ln\varphi(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$

puis, par continuité de la fonction exp :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \ \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \text{ c'est-à-dire } \ \varphi(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

ce qui achève la preuve.

Ex. 20

1) La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $\forall t \in [-\pi, \pi], g(t) = t^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire et de classe C^1 par morceaux.

De même, $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $\forall t \in]-\pi, \pi[, g(t) = t$, $\ g(\pi) = g(-\pi) = 0$ est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Par application du théorème de Dirichlet, avec g on obtient (1) et, avec g_1 on obtient (2).

2) La série de terme général $u_n : t \mapsto (-1)^n \dfrac{\cos nt}{n^2 + \alpha^2}$ $\quad$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. On déduit l'existence et la continuité de f.

Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, formons : $h(t) = f(t) - \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{\pi^2}{12} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^2\cos nt}{n^2(n^2+a^2)}$ (d'après (1))

et soit $v_n : t \mapsto (-1)^n \dfrac{a^2\cos nt}{n^2(n^2+a^2)}$.

On vérifie que $\sum v_n$, $\sum v_n'$, $\sum v_n''$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ donc h et par conséquent f sont de classe C^2 sur $[-\pi, \pi]$.

On obtient $f''(t) - \dfrac{1}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^2\cos nt}{n^2+a^2} = a^2 f(t)$ donc f est solution de $y'' - a^2 y = \dfrac{1}{2}$.

On en déduit $f(t) = -\dfrac{1}{2a^2} + \lambda \mathrm{ch}\, at + \mu \mathrm{sh}\, at$, et f étant paire, il vient $\mu = 0$ donc $f(t) = -\dfrac{1}{2a^2} + \lambda \mathrm{ch}\, at$.

De $f'(t) = a\lambda \mathrm{sh}\, at = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^2\sin nt}{n(n^2+a^2)} + \frac{t}{2}$, on déduit $f'(\pi) = a\lambda\, \mathrm{sh}\, a\pi = \dfrac{\pi}{2}$, d'où

$$\lambda = \frac{\pi}{2a\, \mathrm{sh}\, \pi a} \text{ et enfin } f(t) = \frac{\pi\, \mathrm{ch}\, at}{2a\, \mathrm{sh}\, a\pi} - \frac{1}{2a^2}.$$

3) Le calcul précédent a donné, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$:

$$f'(t) = \frac{\pi\, \mathrm{sh}\, at}{2\, \mathrm{sh}\, a\pi} = \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^2\sin nt}{n(n^2+a^2)}$$

d'où, d'après (2), $f'(t) = \dfrac{\pi\, \mathrm{sh}\, at}{2\, \mathrm{sh}\, a\pi} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n}\left[1 - \frac{a^2}{n^2+a^2}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nt}{n^2+a^2}$.

Ex. 21

1) • Posons $u_n(x) = e^{-|x+2n\pi|}$. Les deux séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ et $\displaystyle\sum_{n\leqslant 0} u_n(x)$ sont convergentes en tant que séries géométriques de raison $e^{-2\pi}$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}$.

• Pour tout $a > 0$ on a $\forall x \in [-a, a]$, $|x + 2n\pi| \geqslant 2|n|\pi - |x| \geqslant 2|n|\pi - a$. Il en résulte que les deux séries précédentes convergent normalement sur tout segment $[-a, a]$ et donc que f est continue sur $\mathbb{R}$.

• En translatant l'indice de sommation, on montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$.

2) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons $I_k = [2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Les restrictions $v_n = u_{n|I_k}$ sont de classe C^1 avec :

$$v_n'(x) = -\varepsilon\, e^{-|x+2n\pi|}, \text{ où } \varepsilon = 1 \text{ si } n \geqslant -k\ ,\ \varepsilon = -1 \text{ si } n \leqslant -k-1.$$

Comme en 1), on montre que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant -k} v_n'(x)$ et $\displaystyle\sum_{n\leqslant -k-1} v_n'(x)$ sont normalement convergentes sur I_k, il en résulte que la restriction $f_{|I_k}$ est de classe C^1.

Finalement f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle est donc développable en série de Fourier d'après le théorème de Dirichlet.

3) Les séries de terme général $x \mapsto e^{-|x+2k\pi|-inx}$, $(k \in \mathbb{Z}^+)$ et $(k \in \mathbb{Z}^-)$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$, on a donc :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-|x+2k\pi|-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} e^{-|x+2k\pi|-inx}\mathrm{d}x.$$

Pour $k \geqslant 0$, on obtient $\forall x \in [0, 2\pi]$, $x + 2k\pi \geqslant 0$ donc :

$$\int_0^{2\pi} e^{-|x+2k\pi|-inx}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{-x(1+in)-2k\pi}\mathrm{d}x = \frac{e^{-2k\pi}}{1+in}\left(1 - e^{-2\pi}\right).$$

De même pour $k \leqslant -1$, on obtient $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-|x+2k\pi|-inx}\mathrm{d}x = \frac{e^{2k\pi}}{1-in}\left(e^{2\pi} - 1\right)$.

On en déduit $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+in}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-2k\pi} - e^{-2(k+1)\pi}\right) + \frac{1}{1-in}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-2(k-1)\pi} - e^{-2k\pi}\right)\right)$

d'où : $$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+in} + \frac{1}{1-in}\right) = \frac{1}{\pi(n^2+1)}.$$

En conclusion, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{\pi(n^2+1)} = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$.

Ex. 22

1) Considérons la série de fonctions de terme général $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\frac{(x-k)^2}{2t}}$.
Pour x réel fixé les séries de termes généraux $u_k(x)$ et $u_{-k}(x)$ sont convergentes (règle de Riemann).

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto u_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(u_k(x) + u_{-k}(x)\right)$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Ou aussi : $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-k)^2}{2t}}$.

On montre que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en établissant la convergence normale des séries de fonctions de termes généraux u'_k et u'_{-k} sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$.

2) De la relation $u_k(x+1) = u_{k-1}(x)$, on déduit $f(x+1) = f(x)$: f est 1-périodique.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x$. La convergence normale sur $[0, 1]$ permet d'écrire :

$$c_n = \int_0^1\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-k)^2}{2t} - 2i\pi nx}\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 e^{-\frac{(x-k)^2}{2t} - 2i\pi nx}\mathrm{d}x$$

d'où $c_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{k-1}^{k} e^{-\frac{y^2}{2t} + 2i\pi ny}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2t} + 2i\pi ny}\mathrm{d}y$ ou aussi : $c_n = \sqrt{2t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 + 2i\pi nu\sqrt{2t}}\mathrm{d}u$.

Introduisons la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 + 2ixu}\mathrm{d}u$.

On a ainsi $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, u)\mathrm{d}u$ avec $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x, u) \mapsto e^{-u^2 + 2ixu}$.

Cette fonction ψ est clairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\psi(x, u)| = e^{-u^2}$ et $u \mapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, u) = 2iue^{-u^2 + 2ixu}$ donc :

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, u)\right| = 2n\,|u|\,e^{-u^2} \quad \text{et} \quad u \mapsto |u|\,e^{-u^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

D'après le théorème de Leibniz (chapitre 6, théorème 18), il en résulte que la fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi' : x \mapsto 2in\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-u^2 + 2inxu}\mathrm{d}u$.

Une intégration par parties donne : $\varphi'(x) = -2n^2 x\,\varphi(x)$, d'où on en déduit :

$$\varphi(x) = \varphi(0)e^{-n^2x^2} \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

Comme $c_n = \sqrt{2t}\,\varphi(\pi\sqrt{2t})$, on obtient les coefficients de Fourier de f :

$$c_n = \sqrt{2\pi\, t}\, e^{-2n^2\pi^2 t} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet s'applique :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-k)^2}{2t}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sqrt{2\pi\, t}\, e^{-2n^2\pi^2 t + 2i\pi nx}.$$

A. Équations linéaires

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Étude théorique

1.1 – Définitions

Définition 1

Aux applications continues $a : I \to \mathcal{L}(E)$, et $b : I \to E$ on associe l'équation différentielle, dite **linéaire du premier ordre**, $(L) : x' = a(t) \cdot x + b(t)$. [1]

On appelle équation homogène associée à (L) l'équation différentielle :

$$(H) : x' = a(t) \cdot x.$$

Une solution de (L) est une application dérivable $f : I \to E$ telle que :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = a(t).f(t) + b(t).$$

[1] L'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $a(t)$ est, ici, notée $a(t) \cdot x$.

Remarques

1) Le théorème suivant assure l'existence de solutions de (L) et de (H) sur l'intervalle I. On note alors $\mathcal{S}(L)$ et $\mathcal{S}(H)$ l'ensemble des solutions sur I de (L) et (H) respectivement.
2) On constate que toute solution de (L) ou de (H) est de classe C^1 sur I.

1.2 – Théorèmes

Théorème 1

Théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire [2]

Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, l'équation (L) admet une unique solution f sur I vérifiant $f(t_0) = x_0$.

On dit qu'il y a unicité au **problème de Cauchy** en (t_0, x_0).

[2] Ce théorème est admis et s'applique aussi à l'équation H. Les solutions de (L) sur I sont maximales, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de solutions les prolongeant strictement.

Théorème 2

Structure de l'ensemble des solutions

a) L'ensemble $\mathcal{S}(H)$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, E)$ isomorphe à E, donc de dimension n.

b) L'ensemble $\mathcal{S}(L)$ des solutions de (L) est un sous-espace affine de $C^1(I, E)$, de direction $\mathcal{S}(H)$.

a) Il est clair que $\mathcal{S}(H)$ est un sous-espace de $C^1(I, E)$. Pour $t_0 \in I$ fixé, le théorème 1 indique que l'application linéaire $\Phi_{t_0} : x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(H)$ sur E.

b) L'existence de solutions de (L) sur I donne $\mathcal{S}(L) \neq \varnothing$, si f et g sont deux d'entre elles, on vérifie que $f - g \in \mathcal{S}(H)$.

Définition 2

Soit $\mathcal{H} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ un système de n éléments de $C^1(I, E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E.

Pour tout $t \in I$, $W(t) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t))$ est appelée **matrice wronskienne** en t du système $\mathcal{H}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Le déterminant $w(t) = \det W(t)$ est le **wronskien** en t du système $\mathcal{H}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. [3]

[3] Les applications $W : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $w : I \to \mathbb{K}$ sont appelées respectivement wronskienne et wronskien de $\mathcal{H}$ par rapport à $\mathcal{B}$.

Propriété 1

Bases de $S(H)$

Soit $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_n)$ un n-uplet de solutions de (H).

a) Pour tout $t \in I$, le rang du système $\mathcal{H}$ de $S(H)$ est égal au rang du système $\mathcal{H}(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t))$ de E.

b) Soit w le wronskien de $\mathcal{H}$ par rapport à une base fixée $\mathcal{B}$ de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathcal{H}$ est une base de E,

(2) il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$,

(3) pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$.

Une base de $S(H)$ est aussi appelée **système fondamental** de l'équation (H).

a) $\mathcal{H}(t)$ étant l'image par l'isomorphisme Φ_t du système $\mathcal{H}$, on a $\operatorname{rg} \mathcal{H}(t) = \operatorname{rg} \mathcal{H}$.

b) Corollaire du a).

Propriété 2

Soit $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_n)$ un système fondamental de l'équation (H) et $k \in \{0, 1\}$.

Pour tout $f \in C^k(I, E)$, il existe n applications $u_1, \dots, u_n$ de $C^k(I, \mathbb{K})$, définies de manière unique par $\quad f = u_1 h_1 + \dots + u_n h_n$.

Soit $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de E et W la wronskienne de $\mathcal{H}$ par rapport à $\mathcal{B}$.

D'après la propriété 1, pour tout $t \in I$, $\mathcal{H}(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t))$ est une base de E, et $W(t)$, matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{H}(t)$, est inversible.

On dispose ainsi d'applications de classe C^1 de I dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$W : t \mapsto W(t) \quad \text{et} \quad W^{-1} : t \mapsto [W(t)]^{-1}.$$

Introduisons les applications coordonnées $f_1, f_2, \dots, f_n$ de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall t \in I, \ f(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) e_j \quad , \quad \forall j \in [\![1, n]\!], \ f_j \in C^k(I, E).$$

Pour tout $t \in I$ fixé, l'existence et l'unicité de $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ correspond à un changement de coordonnées, dont l'écriture matricielle est :

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = [W(t)]^{-1} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Les n-applications $u_1, \dots, u_n$ de I dans $\mathbb{K}$ ainsi définies sont de classe C^k.

Théorème 3

Méthode de variation des constantes

Avec les notations de la propriété 2,

a) l'application $f = u_1 h_1 + \dots + u_n h_n$ est solution de l'équation (L) si et seulement si :

$$u_1' h_1 + \dots + u_n' h_n = b ;$$

b) d'après la propriété 2, l'application $b \in C^0(I, E)$ s'écrit de façon unique :

$$b = v_1 h_1 + \dots + v_n h_n \quad , \quad v_j \in C^0(I, E)$$

La condition du a) s'exprime donc par : $\quad \forall j \in [\![1, n]\!], \ u_j' = v_j$.

La proposition b) est conséquence directe de ce qui précède et signifie que la connaissance d'une base de $S(H)$ ramène la résolution de l'équation (L) à des calculs de primitives.

Sachant que $h_1, \dots, h_n$ sont solutions de (H), la dérivée de $f = u_1 h_1 + \dots + u_n h_n$ s'écrit $\quad \forall t \in I, \ f'(t) = u_1'(t) h_1(t) + \dots + u_n'(t) h_n(t) + a(t) \cdot f(t)$.

Donc la condition $\ \forall t \in I, f'(t) = a(t) \cdot f(t) + b(t)$ s'écrit $\ u_1' h_1 + \dots + u_n' h_n = b$.

1.3 – Système différentiel

Il s'agit de l'écriture matricielle de l'équation linéaire (L).

Étant donnée une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de E, aux applications a et b sont associées les applications $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, où, pour tout $t \in I$, $A(t)$ et $B(t)$ sont les matrices de $a(t)$ et $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle alors système différentiel l'équation différentielle notée : $X' = A(t)X + B(t)$ dont les fonctions inconnues X sont à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

✎[4] Usuellement, $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont identifiés au moyen de l'isomorphisme associant leurs bases canoniques.

Inversement, à un tel système différentiel on associe canoniquement une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{K}^n$ au moyen de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. ✎[4]

Les théorèmes précédents s'appliquent (mutatis mutandis) aux systèmes différentiels.

Exemple 1 Résoudre le système différentiel : $(L)\ \begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos t \\ y' = x + 2ty + t\sin t \end{cases}$

(Effectuer dans le système homogène le changement de fonctions inconnues défini par :

$$u = xe^{-t^2} \quad , \quad v = ye^{-t^2}.)$$

Ici, $E = \mathbb{R}^2$ et $I = \mathbb{R}$.

Le système homogène associé est $(H)\ \begin{cases} x' = 2tx - y \\ y' = x + 2ty \end{cases}$ ✎[5] et le changement de fonctions indiqué donne :

✎[5] On remarque que dans ce cas $S(H) \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = u \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} u'' + u = 0 \\ v = -u' \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} u = \lambda\cos + \mu\sin \\ v = \lambda\sin - \mu\cos \end{cases} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Les deux solutions $\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}-\sin\\ \cos\end{bmatrix}$ de ce système fournissent les deux solutions h_1 et h_2 de (H) suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_1(t) = \begin{bmatrix} e^{t^2}\cos t \\ e^{t^2}\sin t \end{bmatrix} \quad , \quad h_2(t) = \begin{bmatrix} -e^{t^2}\sin t \\ e^{t^2}\cos t \end{bmatrix}.$$

Comme elles sont indépendantes, (h_1, h_2) est une base de $S(H)$.

La méthode de variation des constantes consiste à trouver deux applications w_1 et w_2 de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f = w_1h_1 + w_2h_2$ soit solution du système (L).

On constate que $\begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{bmatrix} = te^{-t^2}h_1(t)$ et, par conséquent, $w_1'(t) = te^{-t^2}$, $w_2'(t) = 0$.

Donc $f \in S(L)$ si et seulement si il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(t) = \left(\alpha - \frac{1}{2}e^{-t^2}\right)h_1(t) + \beta h_2(t) \qquad \begin{cases} x = (\alpha\cos t - \beta\sin t)e^{t^2} - \dfrac{1}{2}\cos t \\ y = (\alpha\sin t + \beta\cos t)e^{t^2} - \dfrac{1}{2}\sin t \end{cases}$$

Exemple 2 Retrouver le résultat de l'exemple précédent en utilisant la nouvelle fonction inconnue $z = x + iy$.

Le système devient, par le changement indiqué, l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(L) \quad z' = (2t + i)z + te^{it}.$$

Le nouveau changement de fonction inconnue défini par $z = ue^{it}$ transforme l'équation en :

$$u' = 2tu + t.$$

L'équation homogène a pour solution générale $\mathbb{R} \to \mathbb{C},\quad t \mapsto \lambda\, e^{t^2} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$.

Une solution particulière est $t \mapsto -\dfrac{1}{2}$. D'où la solution générale de (L) :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto \left(\lambda e^{t^2} - \frac{1}{2}\right)e^{it}.$$

Le couple formé des parties réelle et imaginaire donne la solution trouvée précédemment.

Une autre base de $S_{\mathbb{C}}$ est (u_1, u_2, u_3) donnée par :

$$u_1(t) = e^{2t} C_1 \,,$$

$$u_2(t) = \mathrm{Re}\left(v_2(t)\right) = e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{bmatrix} ,$$

$$u_3(t) = \mathrm{Im}\left(v_2(t)\right) = e^t \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{bmatrix} .$$

Les solutions étant à valeurs réelles, (u_1, u_2, u_3) est aussi une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}$.

La solution générale du système différentiel réel proposé est donc :

$$X = \alpha_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{bmatrix} + \alpha_3 e^t \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{bmatrix} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Exemple 5 Résoudre le système différentiel réel $(H)\ :\ X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $-(T-1)(T-2)^2$.

On pose $B_1 = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B_2 = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme B_2 est de rang 2, la matrice A n'est pas diagonalisable mais elle est trigonalisable.

Les sous-espaces propres respectivement associés aux valeurs propres 1 et 2 sont dirigés par $u_1 = (2, 0, 1)$ et $u_2 = (2, 1, 1)$.

En posant $u_3 = (1, 0, 0)$, on vérifie que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ et a l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

La matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3) est : $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Formons alors $a(u_3) = -e_2 - e_3 = -u_2 + 2u_3$, on en déduit que :

$$\mathrm{mat}_{(u_k)}\, a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T \text{ donc que } P^{-1}AP = T.$$

Le changement de fonction inconnue défini par $X = PY$ conduit ainsi au système :

$$Y' = TY \qquad \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 - y_3 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} y_1 = ae^t \\ y_2 = be^{2t} - cte^{2t} \\ y_3 = ce^{2t} \end{cases}$$

puis, avec $X = PY$, il vient :

$$\begin{cases} x_1 = 2ae^t + (2b + c - 2ct)e^{2t} \\ x_2 = (b - ct)e^{2t} \\ x_3 = ae^t + (b - ct)e^{2t} \end{cases}$$

3.2 – Méthode de variation des constantes

Des théorèmes précédents, on déduit :

- Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\Phi_t \ : h \mapsto \left(h(t_0), h'(t_0)\right)$ est un isomorphisme de $S(H)$ sur $\mathbb{K}^2$.
- Soit h_1 et h_2 deux solutions de (H), pour tout $t \in I$, le rang de (h_1, h_2) est égal au rang de la matrice : $W(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ✎(10)

✎(10) $W(t)$ et $\det W(t)$ sont encore appelés **matrice wronskienne** et **wronskien** du système (h_1, h_2) en t.

- Soit (h_1, h_2) une base de (H) : pour tout $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, il existe un unique couple (u_1, u_2) d'applications de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ tel que : $f = u_1 h_1 + u_2 h_2 \quad , \quad f' = u_1 h_1' + u_2 h_2'$ **(1)**.

Ce qui fournit $\quad u_1' h_1 + u_2' h_2 = 0$.

- Avec les notations et les hypothèses précédentes, on peut énoncer :

$f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ est une solution de (L) si et seulement si le couple (u_1, u_2) qui vient de lui être associé par **(1)** vérifie : $\quad u_1' h_1 + u_2' h_2 = 0 \quad u_1' h_1' + u_2' h_2' = c$ **(2)**.

Les deux dernières équations forment un système linéaire aux inconnues u_1', u_2' dont la solution est $\quad u_1' = -\dfrac{h_2 c}{w} \quad , \quad u_2' = \dfrac{h_1 c}{w} \quad$ où $\quad w = \det \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}$.

La solution générale de (L) s'écrit :

$$t \mapsto \alpha h_1(t) + \beta h_2(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{c(u)}{w(u)} \left(h_1(u) h_2(t) - h_2(u) h_1(t)\right) \mathrm{d}u \ , \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2.$$

Exemple 6 a) Trouver les solutions de l'équation différentielle $(H) : t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0$ de la forme $t \mapsto |t|^\alpha \ , \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

b) En déduire la résolution de $(L) : t^2 x'' - 2tx' + 2x = t^4 \cos t - 1$.

a) (H) est une équation d'Euler. Elle vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

On trouve que sur chacun de ces intervalles, les solutions de la forme suggérée par l'énoncé sont $t \mapsto |t|$ et $t \mapsto |t|^2$. On en déduit que les fonctions $h_1 \ : t \mapsto t$ et $h_2 \ : t \mapsto t^2$ sont solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ (et a fortiori sur I_1 et I_2).

b) La méthode de superposition des solutions, (voir MPSI–Analyse, chapitre 2, propriété 6), peut s'appliquer avec pour seconds membres $c_1 = -1$ et $c_2 = t^4 \cos t$.

L'équation (L_1) associée à c_1 admet sur $\mathbb{R}$ la solution $t \mapsto -\dfrac{1}{2}$.

Pour l'équation (L_2) associée à c_2, appliquons la méthode de variation des constantes.

On trouve $\quad \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{vmatrix} = t^2$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^2(I_k, \mathbb{R})$, $k = 1$ ou 2, il existe un unique couple $(u, v) \in \mathcal{C}^1(I_k, \mathbb{R})$ tel que $f = uh_1 + vh_2$, $f' = uh_1' + vh_2'$ et f est solution de (L_2) sur I_k si et seulement si :

$$tu' + t^2 v' = 0 \quad , \quad u' + 2tv' = t^2 \cos t.$$

On en déduit successivement :

$$u' = -t^2 \cos t \quad , \quad v' = t \cos t$$

$$u = -t^2 \sin t - 2t \cos t + 2 \sin t + \lambda \quad , \quad v = t \sin t + \cos t + \mu$$

$$f(t) = 2t \sin t - t^2 \cos t + \lambda t + \mu t^2$$

D'où les solutions sur I_k, $k \in \{1, 2\}$: $t \mapsto \lambda t + \mu t^2 - \dfrac{1}{2} + 2t \sin t - t^2 \cos t$.

On pourra vérifier que ce sont aussi les solutions sur $\mathbb{R}$. Donc, dans cet exemple, l'ensemble des solutions de (L) sur $\mathbb{R}$ est aussi un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ce que ne permet pas de prévoir le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le point $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

d) Soit ψ une solution non constante quelconque, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\psi(\mathbb{R}) \subset \left]p\pi, (p+1)\pi\right[$ et le même calcul qu'en c) donne :

$$1 = \frac{\psi'}{\sin\psi} \quad \text{d'où} \quad \ell n\left|\tan\frac{\psi}{2}\right| = x - a$$

- si p est pair : $p = 2k$, on obtient :

$$\psi(x) = 2k\,\pi + 2\operatorname{Arctan} e^{x-a} = 2k\,\pi + \varphi\,(x-a)\,;$$

- si p est impair, $p = 2k+1$, on obtient :

$$\psi(x) = (2k+2)\,\pi - 2\operatorname{Arctan} e^{x-a} = 2(k+1)\,\pi - \varphi\,(x-a).$$

On en déduit que $\mathscr{C}_\psi$, courbe intégrale de ψ, se déduit de $\mathscr{C}$, soit dans la translation de vecteur $a\,\vec{\imath} + 2k\pi\,\vec{\jmath}$, soit dans le produit de la translation de vecteur $a\,\vec{\imath} + 2(k+1)\pi\,\vec{\jmath}$ et de la symétrie par rapport à Ox.

Exemple 9 (E) : $yy'' = 1 + y'^2$. Trouver la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

En déduire toutes les autres solutions de (E).

a) <u>Remarques sur l'équation (E)</u>

Soit $y\ : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E), alors $x \mapsto -y(x)$, $x \mapsto y(x-\mu)$ et $x \mapsto \lambda y\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ sont aussi des solutions. Observons que, d'après (E), y ne s'annule pas, on est en fait ramené à résoudre $y'' = \frac{1+y'^2}{y}$.

b) <u>Application du théorème de Cauchy-Lipschitz d'ordre deux</u>

Avec l'ouvert $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^3$ et la fonction :

$$f\ : \Omega \to \mathbb{R},\ (x, y, y') \mapsto \frac{1+y'^2}{y},$$

de classe C^1 sur Ω, pour tout $(x_0, y_0, y_0') \in \Omega$, il existe une unique solution maximale de $(E)\ : y'' = \frac{1+y'^2}{y}$, vérifiant :

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_0'.$$

Il est visible que la solution demandée est $x \mapsto \operatorname{ch} x$, définie sur $\mathbb{R}$, donc, d'après les remarques préliminaires, toute fonction :

$$\psi_{\lambda,\mu}\ : x \mapsto \lambda \operatorname{ch}\frac{x-\mu}{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R}^*, \mu \in \mathbb{R}) \quad \text{est solution sur } \mathbb{R}.$$

Soit alors φ la solution (maximale) telle que :

$$\varphi(x_0) = y_0 \quad , \quad \varphi'(x_0) = y_0' \quad (x_0, y_0, y_0') \in \Omega$$

par identification, on constate que pour :

$$\lambda = \frac{y_0}{\sqrt{1+y_0'^2}} \quad \text{et} \quad \mu = x_0 - \frac{y_0 \operatorname{Argsh} y_0'}{\sqrt{1+y_0'^2}},$$

la fonction $\psi_{\lambda,\mu}$ vérifie aussi :

$$\psi_{\lambda,\mu}(x_0) = y_0 \text{ et } \psi'_{\lambda,\mu}(x_0) = y_0'.$$

Donc par unicité pour le problème de Cauchy, on a $\varphi = \psi_{\lambda,\mu}$ et φ est solution sur $\mathbb{R}$.

2. Systèmes différentiels autonomes d'ordre 2

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 5

Champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$

Soit F une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^2$ de composantes f et g.

$$F \; : \; U \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \quad \mapsto \big(f(x, y), g(x, y)\big)$$

$$\text{ou} \quad F \; : \; U \to \mathbb{R}^2, \quad M \quad \mapsto \big(f(M), g(M)\big) \quad \text{en notant } (x, y) = M.$$

Le **champ de vecteurs** associé à F (ou au couple (f, g)) est l'application $V \; : \; U \to U \times \mathbb{R}^2$ qui à tout point M de U associe le couple (M, M_1) tel que $M_1 = M + F(M)$: (15)

$$V \; : \; M \mapsto \big(M, M + F(M)\big).$$

(15) En langage géométrique traditionnel, le couple (M, M_1) est aussi appelé un **bipoint** ou encore **vecteur** lié et noté $\overrightarrow{MM_1}$.

Exemple : **Le champ des vitesses d'un solide à un instant t**

Soit le mouvement d'une plaque plane S glissant sur un plan P fixe de $\mathbb{R}^3$ euclidien.

On prouve en cinématique qu'à tout instant t, il existe un vecteur $\overrightarrow{\Omega_t}$ (rotation instantanée) orthogonal à P tel que M_0 étant un point de S, la vitesse $\overrightarrow{V_t(M)}$ de tout point M de S à l'instant t est :

$$\overrightarrow{V_t(M)} = \overrightarrow{V_t(M_0)} + \overrightarrow{\Omega_t} \wedge \overrightarrow{M_0 M}.$$

L'application $S \to S \times \mathbb{R}^2$, $M \mapsto (M, M_1)$ avec $M_1 = M + \overrightarrow{V_t(M)}$ est le **champ des vitesses** du solide S à l'instant t. (16)

(16) Dans ce cas particulier, ce champ de vitesses est un torseur (voir le cours de physique).

Définition 6

Soit $F \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$ de composantes f et g.

Le système différentiel :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, y) \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x, y) \end{cases}$$

équivalent à l'équation différentielle vectorielle :

$$(\Sigma') \; : \; \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = F(M)$$

est appelé **système autonome** associé à $F = (f, g)$. (17)

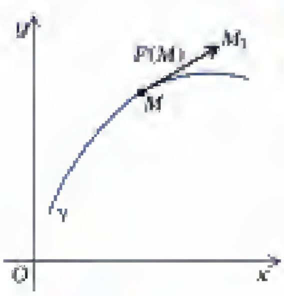
Une solution de ce système sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une application $\Phi = (\varphi, \psi)$ de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad \Phi'(t) = F\big(\Phi(t)\big)$$

ou encore : $\varphi'(t) = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$, $\psi'(t) = g\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$.

L'arc γ paramétré par $t \mapsto M = \big(\varphi(t), \psi(t)\big)$, $t \in I$, est alors appelé une **trajectoire** ou **orbite** du système (Σ) (ou de l'équation (Σ')), ou aussi du champ de vecteurs associé à F.

(17) La fonction F ne dépend pas de la variable t.



Remarques

1) La terminologie est évidemment héritée de la cinématique. En effet, si F définit le champ des vitesses d'une famille de points en mouvement dans un plan P, les trajectoires de ces points sont des arcs qui, en tout point M, admettent pour vecteur tangent le vecteur vitesse $F(M)$.

2) Φ est solution de (Σ) sur I se dit aussi (I, Φ) est solution de (Σ).

Définition 7

On dit que la solution (I, Φ) est **maximale** lorsqu'il n'existe pas de solution la prolongeant strictement.
C'est-à-dire que pour toute solution (J, Ψ) telle que $J \subset I$ et Φ_J on a $I = J$ et $\Phi = \Psi$.

Soit f et g dans $C^1(U, \mathbb{R})$ et le système autonome :

$$(\Sigma) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

Propriété 3

Si $\Phi = (\varphi, \psi)$ est une solution de (Σ) sur I, alors pour tout $h \in \mathbb{R}$, en posant $I_1 = I + h = \{t + h \,/\, t \in I\}$:

$$\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}, \ t \mapsto \varphi(t - h) \quad \text{et} \quad \psi_1 : I_1 \to \mathbb{R}, \ t \mapsto \psi(t - h)$$

$\Phi_1 = (\varphi_1, \psi_1)$ est solution de (Σ) sur I_1. ✎(18)

✎(18) On dit que la famille des solutions du système (Σ) est invariante par translation de la variable.
Ceci justifie le qualificatif **autonome** attribué au système (Σ).

☞ Propriété évidente due au fait que la variable t n'intervient pas explicitement dans le système.

On remarquera que Φ et Φ_1 définissent la même trajectoire du système (Σ).

Théorème 9

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe une unique solution maximale (I, Φ_0) de (Σ) vérifiant :

$$\Phi(t_0) = (x_0, y_0).$$

L'intervalle I est ouvert.

☞ Résultat admis.

Corollaire

Par tout point $(x_0, y_0) \in U$, il passe une trajectoire et une seule du système (Σ).

Méthodes

L'essentiel

I. Équations linéaires

✔ **Si l'on veut** déterminer une solution particulière d'une équation linéaire à coefficients polynomiaux,

- **on peut** penser à rechercher cette solution sous la forme de la somme d'une série entière.
  Cette méthode peut également aboutir avec un second membre non polynomial mais développable en série entière.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2.

✔ **Si l'on veut** résoudre une équation linéaire à coefficients non constants,

- **on peut** penser à rechercher un changement de variable qui la transforme en une équation à coefficients constants.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 3.

✔ **Si l'on veut** résoudre une inéquation :

$$(I)\ :\ af'' + bf' + cf \geqslant 0,$$

- **on peut** se ramener à la résolution d'une équation différentielle en observant que (I) équivaut à :
  $$af'' + bf' + cf = \varphi \text{ avec } \varphi \text{ positive.}$$
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 4.

✔ **Si l'on veut** interpréter une limite :

$$(L)\ :\ \lim(af'' + bf' + cf) = \ell,$$

- **on peut** se ramener à une équation différentielle en écrivant cette condition :
  $$af'' + bf' + cf = \varphi \text{ avec } \lim \varphi = \ell.$$
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 5.

✔ **Si l'on veut** résoudre un système différentiel linéaire du deuxième ordre aux inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$X'' = AX' + BX + C(t)$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{C}^0\big(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)$,

- **on peut**

  - lorsque A est nulle, étudier la réduction de B et opérer comme pour les systèmes du premier ordre :
    1) si B est diagonalisable, en notant P une matrice diagonalisant B, le changement de fonctions inconnues défini par $X = PY$ ramène à un système de n équations du type $y_k'' = \lambda_k y_k + d_k(t)$;
    2) sinon il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}BP$ soit triangulaire et le changement de fonctions inconnues défini par $X = PY$ ramène à un système à inconnues échelonnées ;

  - dans le cas général, observer qu'en introduisant les inconnues auxiliaires $x_{n+k} = x_k'$, $1 \leqslant k \leqslant n$, on obtient un système linéaire du premier ordre aux inconnues $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$.
    → Voir *Mise en œuvre*, exercices 6, 7.

Mise en œuvre

I. Équations linéaires

Ex. 1

Résoudre l'équation différentielle $(H)\ :\ tx'' + 2x' - tx = 0.$

Indications

Déterminer les solutions développables en série entière. Puis achever la résolution avec la méthode du théorème 6.

Solution

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière de rayon $\rho > 0$ et de somme f.

f est solution de (H) sur $]-\rho, \rho[$ si et seulement si :

$$\forall t\in]-\rho, \rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

soit $2a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+3)a_{n+2} - a_n\right] t^{n+1} = 0$ ou encore :

$$2a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0,\ (n+2)(n+3)a_{n+2} - a_n = 0. \qquad (\mathcal{R})$$

La relation $(\mathcal{R})$ et le critère de d'Alembert donnent $\rho = +\infty$. Donc la somme d'une série entière dont les coefficients vérifient $(\mathcal{R})$ est solution de (H) sur $\mathbb{R}$.

De $(\mathcal{R})$, on déduit $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0,\ a_{2n} = \dfrac{\lambda}{(2n+1)!} \quad$ (avec $\lambda = a_0$).

Ainsi les solutions de (H) développables en série entière sont les fonctions :

$$f_\lambda\ :\ t \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f_\lambda(t) = \lambda \frac{\operatorname{sh} t}{t}.$$

L'équation (H) satisfait aux conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

Transformons (H) par le changement de fonction inconnue défini sur I_1 ou sur I_2 par $x = y\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$.

On trouve que x est solution de (H) sur I_1 ou sur I_2 si et seulement si :

$$y'' \operatorname{sh} t + 2y' \operatorname{ch} t = 0$$

d'où on déduit $y' = \dfrac{\lambda}{\operatorname{sh}^2 t}$, $y = a\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} + b$ puis $x = a\dfrac{\operatorname{ch} t}{t} + b\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$.

Les solutions de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ sont :

$$t \mapsto a\frac{\operatorname{ch} t}{t} + b\frac{\operatorname{sh} t}{t},\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Commentaires

Cette technique a déjà été rencontrée dans le chapitre 5 à propos de l'utilisation d'une équation différentielle pour calculer un développement en série entière.

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle.

Le calcul est le même sur I_1 ou sur I_2, il n'y a donc pas lieu de séparer les deux cas.

On vérifie que les solutions sur $\mathbb{R}$ sont : $t \mapsto b\frac{\operatorname{sh} t}{t}$ prolongées par continuité en 0.

Ex. 2

Résoudre l'équation différentielle $(L)\ :\ 2xy' + y = 3x\cos x^{\frac{3}{2}}$.

Indications

Observer que $x \mapsto \cos x^{\frac{3}{2}}$ coïncide sur $[0, +\infty[$ avec la somme d'une série entière.

Solution

L'équation (L) vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur $]0, +\infty[$.
La solution générale sur cet intervalle de l'équation homogène associée est :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x}}.$$

Recherchons alors une solution particulière de (L) sous la forme de la somme d'une série entière.

Remarquons d'abord que pour tout $x \geq 0$, $3x\cos x^{\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{3x^{3n+1}}{(2n)!}$.

Soit alors $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $\rho > 0$ et de somme f.

f est solution de (L) sur $[0, \rho[$ si et seulement si :

$$\forall x \in [0, \rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{3x^{3n+1}}{(2n)!},$$

donc si et seulement si $a_n = 0$ pour tout $n \in \{3k\ /\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{3k+2\ /\ k \in \mathbb{N}\}$ et $(6k+3)a_{3k+1} = \frac{3(-1)^k}{(2k)!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On déduit de ce calcul qu'il existe au plus une série entière de rayon ρ non nul dont la somme f est solution de (L) sur $[0, \rho[$, il s'agit de :

$$\sum_{n \geq 0}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{(2n+1)!}.$$

On vérifie alors que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$ et le calcul précédent montre que f est solution de (L) sur $[0, +\infty[$.

En remarquant que pour tout $x > 0$, $x^{3n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{2n+1}$, il vient :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \frac{\sin x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

En conséquence, la solution générale de (L) sur $]0, +\infty[$ est :

$$x \mapsto \frac{\sin\left(x\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}},\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Commentaires

Les coefficients $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{3}{2}\cos x^{\frac{3}{2}}$ sont continus sur $]0, +\infty[$.

En effet on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

En toute rigueur il ne s'agit pas de f mais de sa restriction à $[0, \rho[$.

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On constate que sur $[0, +\infty[$, (L) admet une solution et une seule : c'est $f_{[0,+\infty[}$.

Ex. 3

Résoudre l'équation différentielle $(H)\ :\ \left(1+x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1+x^2\right)y' + y = 0$.

Indications

Trouver un changement de variable défini par $x = \varphi(t)$ transformant (H) en une équation à coefficients constants.

Solution

(H) vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur $\mathbb{R}$.
Soit φ un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de I sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Posons $g = f \circ \varphi$.

Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, avec $f = g \circ \varphi^{-1}$, en posant $t = \varphi^{-1}(x)$, il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = g'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \frac{g'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$f''(x) = \frac{g''(t)}{\varphi'^2(t)} - g'(t)\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

Donc f est solution de (L) si et seulement si g vérifie :

$$\frac{\left(1+\varphi^2\right)^2}{\varphi'^2} g'' + \left(\frac{2\varphi\left(1+\varphi^2\right)}{\varphi'} - \frac{\varphi''\left(1+\varphi^2\right)^2}{\varphi'^3}\right) g' + g = 0.$$

Remarquons que dans cette équation, le coefficient de g' est, à un facteur 2 près, la dérivée de $\dfrac{\left(1+\varphi^2\right)^2}{\varphi'^2}$.

Ainsi en choisissant φ tel que $\dfrac{1+\varphi^2}{\varphi'} = 1$, on obtient :

$$\forall t \in I, \quad g''(t) + g(t) = 0 \qquad (H')$$

Un couple (I, φ) réalisant ces conditions est constitué de $\varphi \ : t \mapsto \tan t$ avec $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

L'équation (H') donne alors $g(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ et la solution générale de (H) est donc :

$$x \mapsto \lambda \cos\left(\operatorname{Arctan} x\right) + \mu \sin\left(\operatorname{Arctan} x\right)$$

c'est-à-dire $\quad x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{\mu x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Commentaires

L'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On sait que $\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(t)} = \dfrac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(x)}$.

Dans ce genre de calcul, il est avantageux pour composer les dérivations d'utiliser la notation différentielle :
avec $y = f(x) = g(t)$, on a
$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, $g'(t) = \dfrac{dy}{dt}$,
d'où $f'(x) = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\varphi'(t)} \cdot \dfrac{dy}{dt}$,
puis $f''(x) = \dfrac{1}{\varphi'(t)} \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} \cdot \dfrac{dt}{dx} - \dfrac{\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \dfrac{dt}{dx} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

$= \dfrac{1}{\varphi'^2(t)} \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \cdot \dfrac{dy}{dt}$.

La condition $\dfrac{\varphi'}{1+\varphi^2} = 1$ donne $\operatorname{Arctan} \varphi(t) = t - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ex. 4

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) + f''(x) \geqslant 0 \quad$ **(1)**.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Indications

Écrire la condition (1) sous la forme d'une équation différentielle et résoudre celle-ci par la méthode de variation des constantes.

Solution

D'après **(1)**, il existe $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f''(x) + f(x) = g(x) \ \text{ et } \ g(x) \geqslant 0.$$

Utilisons la méthode de variation des constantes : il existe $(u, v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ tel que pour tout x réel,

$$\begin{cases} f(x) = u(x)\cos x + v(x)\sin x \\ f'(x) = -u(x)\sin x + v(x)\cos x \end{cases}$$

et $(u'(x), v'(x))$ est alors défini par le système

$$\begin{cases} u'(x)\cos x + v'(x)\sin x = 0 \\ -u'(x)\sin x + v'(x)\cos x = g(x) \end{cases}$$

Commentaires

Une base de l'espace des solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ est $(\cos, \sin)$.

On en déduit :

$$u'(x) = -\frac{e^{(1+j^2)x}h(x)}{j^2-j} \quad , \quad v'(x) = \frac{e^{(1+j)x}h(x)}{j^2-j} \ ,$$

$$u(x) = \lambda + \frac{1}{i\sqrt{3}}\int_0^x e^{-jt}h(t)\mathrm{d}t$$

$$v(x) = \mu - \frac{1}{i\sqrt{3}}\int_0^x e^{-j^2 t}h(t)\mathrm{d}t.$$

puis :

$$f(x) = \lambda e^{jx} + \mu e^{j^2x} + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^x e^{\frac{t-x}{2}}\,h(t)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\mathrm{d}t.$$

Avec $\left|e^{jx}\right| = \left|e^{j^2x}\right| = e^{-\frac{x}{2}}$, il est clair que $\lim\limits_{+\infty} e^{jx} = \lim\limits_{+\infty} e^{j^2x} = 0$, on est donc ramené à étudier la limite de :

$$F(x) = \int_0^x e^{\frac{t-x}{2}}\,h(t)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\mathrm{d}t\,.$$

Une majoration donne :

$$|F(x)| \leqslant \int_0^x e^{\frac{t-x}{2}}\,|h(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

donc en posant $A = \|\,h\,\|_\infty^{[0,+\infty[}$ et $M(x) = \|\,h\,\|_\infty^{\left[\frac{x}{2},+\infty\right[}$, il vient :

h étant continue sur $[0,+\infty[$ et admettant une limite finie en $+\infty$, elle est bornée sur $[0,+\infty[$ d'où l'existence de A et $M(x)$.

$$|F(x)| \leqslant A\int_0^{\frac{x}{2}} e^{\frac{t-x}{2}}\mathrm{d}t + M(x)\int_{\frac{x}{2}}^x e^{\frac{t-x}{2}}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 2Ae^{-\frac{x}{4}} + 2M(x).$$

$$\int_0^{\frac{x}{2}} e^{\frac{t-x}{2}}\mathrm{d}t = 2\left(e^{-\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

$$\int_{\frac{x}{2}}^x e^{\frac{t-x}{2}}\mathrm{d}t = 2\left(1 - e^{-\frac{x}{4}}\right)$$

Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = 0$, il vient $\lim F(x) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$.

Puisque $\lim\limits_{+\infty} h = 0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe x_0 tel que quel que soit $x \geqslant x_0$, $|h(x)| \leqslant \varepsilon$. Donc pour tout $x \geqslant 2x_0$, $M(x) \leqslant \varepsilon$.

Ex. 6

Résoudre le système différentiel $\quad (L) \ : \ \begin{cases} x'' = 3x + y + e^t \\ y'' = 2x + 2y + e^{2t} \end{cases}$

Indications

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Solution

Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\,\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

Commentaires

Puisqu'elle admet deux valeurs propres distinctes, la matrice A est diagonalisable.

Les calculs de diagonalisation donnent :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Introduisons alors les fonctions inconnues X et Y définies par :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

La solution générale de $X''=X$ s'écrit $X=ae^t+be^{-t}$.

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ est solution de (L) si et seulement si $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ est solution de :

$$(L') \ : \ \begin{cases} X'' = X + \dfrac{e^t - e^{2t}}{3} \\ Y'' = 4Y + \dfrac{2e^t + e^{2t}}{3} \end{cases}$$

La solution générale de (L') est définie par :

$$\begin{cases} X = ae^t + be^{-t} + \dfrac{1}{6}te^t - \dfrac{1}{9}e^{2t} \\ Y = ce^{2t} + de^{-2t} + \dfrac{t}{12}e^{2t} - \dfrac{2}{9}e^t \end{cases} \quad \text{avec } (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

On conclut à l'aide des relations $x = X + Y$ et $y = -2X + Y$:

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{t}{6} + a - \dfrac{2}{9}\right)e^t + be^{-t} + \left(\dfrac{t}{12} + c - \dfrac{1}{9}\right)e^{2t} + de^{-2t} \\ y = -\left(\dfrac{t}{3} + 2a + \dfrac{2}{9}\right)e^t - 2be^{-t} + \left(\dfrac{t}{12} + c + \dfrac{2}{9}\right)e^{2t} + de^{-2t} \end{cases}$$

$X'' = X + \frac{e^t}{3}$ admet une solution particulière de la forme $X = \lambda te^t$ et par identification, on trouve $\lambda = \frac{1}{6}$.

$X'' = X - \frac{e^{2t}}{3}$ admet une solution particulière de la forme $X = \mu e^{2t}$ et une identification donne $\mu = -\frac{1}{9}$.

Le principe de superposition des solutions (cf. PCSI ou MPSI Analyse, chapitre 2) fournit alors une solution de $X'' = X + \frac{e^t - e^{2t}}{3}$.

La seconde équation de (L') se résoud de même.

$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Ex. 7

Résoudre le système différentiel d'ordre 2 (H) : $\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' - y' + x \end{cases}$

Indications

Ramener le problème à la résolution d'un système d'ordre 1.

Solution

En posant $u = x'$ et $v = y'$, à ce système correspond le système différentiel d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^4$:

$$(h') \ : \ X' = AX \quad \text{où}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$.

$A - I_4$ et $A + I_4$ sont de rang 3 : A n'est pas diagonalisable mais, puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable.

Désignons par $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On trouve $\operatorname{Ker}(A - I_4) = \operatorname{Vect}(a_1)$ avec $a_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$,

et $\operatorname{Ker}(A + I_4) = \operatorname{Vect}(a_3)$ avec $a_3 = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$.

Formons alors :

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \qquad (A + I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Commentaires

Pour obtenir une réduite triangulaire simple, on s'appuie sur le fait que, d'après les théorèmes de Cayley-Hamilton et de décomposition des noyaux, on a

$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker}(A - I_4)^2 \oplus \operatorname{Ker}(A + I_4)^2$

ce qui met en évidence une décomposition de $\mathbb{R}^4$ en somme directe de deux sous-espaces stables contenant respectivement $\operatorname{Ker}(A - I_4)$ et $\operatorname{Ker}(A + I_4)$.

D'autre part, l'identité $\forall x \in I,\ f'(x) = e^{-xf(x)}$ avec $f(0) = 0$ donne $\forall x \in I,\ f(x) = \int_0^x e^{-tf(t)}\mathrm{d}t$, donc pour tout $x \in [0, b[$, il vient :

$$f(x) \leqslant \int_0^x \mathrm{d}t < b.$$

On sait maintenant qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $L = \lim\limits_{x \to b} f(x)$.

C'est le théorème de la limite monotone : f est croissante majorée.

Définissons alors $g\ :\ ]a, b] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $g(b) = L$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x \to b} g'(x) = e^{-bL}$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$.

Voir à ce propos le chapitre 4, théorème 10 : caractérisation des aplications de classe $\mathcal{C}^1$.

On dispose ainsi d'une solution g de (E) prolongeant strictement f ce qui est contraire au caractère maximal de f.

C'est absurde, on a donc $b = +\infty$.

Considérons maintenant la fonction :

$$h\ :\ ]-\infty, -a[\to \mathbb{R},\quad x \mapsto -f(-x).$$

Inutile de prouver directement $a = -\infty$: l'imparité va nous donner ce résultat.

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $-I = \{x\ /\ -x \in I\}$ l'intervalle symétrique de I par rapport à 0.

Puisque f est solution de (E) sur I, en posant $-I =]-\infty, -a[$, on obtient $\forall x \in -I,\ f'(-x) = e^{xf(-x)}$ c'est-à-dire $h'(x) = e^{-xh(x)}$: h est solution sur $-I$.

De plus si (J, h_1) est une solution prolongeant $(-I, h)$, le même calcul montre que $(-J, f_1)$ avec $f_1\ :\ x \mapsto -h_1(-x)$ est une solution prolongeant (I, f). Puisque (I, f) est maximale, on en déduit :

$$-J = I,\ f_1 = f \text{ donc } J = -I \text{ et } h_1 = h.$$

Comme de plus $h(0) = f(0) = 0$, on a ainsi trouvé deux solutions maximales (I, f) et $(-I, h)$ vérifiant la même condition initiale.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il en résulte $I = -I$ et $h = f$ donc f est impaire et $I = \mathbb{R}$.

$I = -I$ donne $a = -b = -\infty$.

2) Sur $[1, +\infty[$, on a $f(x) \geqslant f(1) > 0$ donc :

$$f'(x) \leqslant e^{-xf(1)}.$$

On a vu que f est croissante, il s'agit donc ici de montrer qu'elle est majorée.

$$\int_1^x e^{-tf(1)}\mathrm{d}t = \frac{e^{-f(1)} - e^{-xf(1)}}{f(1)}.$$

On en déduit $\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) - f(1) \leqslant \int_1^x e^{-tf(1)}\mathrm{d}t$ donc :

$$f(x) \leqslant f(1) + \frac{e^{-f(1)}}{f(1)}.$$

L'existence de λ réel tel que $\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en résulte.

3) Sur $]0, +\infty[$, on a $0 < f(x) < \lambda$ donc $f'(x) > e^{-\lambda x}$ puis :

$$f(x) \geqslant \int_0^x e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \text{ c'est-à-dire } f(x) \geqslant \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right).$$

Une majoration de f sur $\mathbb{R}_+$ induit une minoration de f' puis, par intégration, une minoration de f. De même une minoration de f conduit à une majoration de f.

En passant à la limite quand x tend vers $+\infty$, cette inégalité donne $\lambda \geqslant \frac{1}{\lambda}$ donc $\lambda^2 \geqslant 1$ et, puisque λ est positif, $\lambda \geqslant 1$.

En procédant comme en 2), pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\forall x \in [a, +\infty[,\ f(x) \leqslant f(a) + \frac{e^{-af(a)}}{f(a)}.$$

Si $\lambda > 1$, il existe $a \in]0, +\infty[$ tel que $f(a) = 1$, et puisque l'on sait que $f(x) < x$ sur $]0, +\infty[$, on a nécessairement $a > 1$.

En effet f est continue strictement croissante, elle induit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]f(0), \lambda[=]0, \lambda[$.

Alors avec $e^{-af(a)} = e^{-a} \leqslant \frac{1}{e}$, l'inégalité précédente donne pour tout $x \geqslant a,\ f(x) \leqslant 1 + \frac{1}{e}$. En passant à la limite, on en déduit $\lambda \leqslant 1 + \frac{1}{e}$.

Pour $\lambda = 1$ cette inégalité est évidente. La preuve est donc complète.

Posons alors $K = I \cap]-\infty, 0[$ et, si K est non vide, $\psi = f|_K$.

Comme précédemment, (K, ψ) est solution maximale de (E_1) telle que :

$$\{(x, \psi(x)/x \in J\} \subset \Omega_1 \text{ avec } \Omega_1 =]-\infty, 0[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre encore l'existence et l'unicité d'une solution maximale de (E_1) au problème de Cauchy en tout point $(x_0, y_0) \in \Omega_1$.

On remarque que $\psi = f|_K$ n'est pas la fonction nulle car on aurait dans ce cas $f'_g(0) = 0$ et $f'_d(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et f ne serait pas dérivable en 0. En conséquence, par unicité au problème de Cauchy en tout point $(x, 0) \in \Omega_1$, on a $\forall x \in K,\ \psi(x) \neq 0$.

Le calcul se déroule donc de la même façon que celui de φ et on obtient l'existence de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(x) = \text{Arcsin}\, \mu x$.

Alors $f'_g(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donne $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc :

$$\psi(x) = \text{Arcsin}\, \frac{x}{\sqrt{2}} \text{ et } K \subset]-\sqrt{2}, 0[.$$

En conclusion, le problème admet au plus une solution, il s'agit de la fonction $f :]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\to \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ x \mapsto \text{Arcsin}\, \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

- **Synthèse**

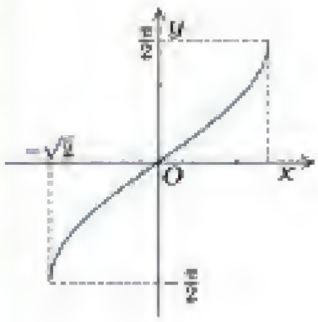
Il reste à vérifier que la fonction f ainsi définie est solution de (E) telle que :

$$f(1) = \frac{\pi}{4}.$$

K est non vide si et seulement si 0 est intérieur à I.

La fonction ψ est de classe C^1 sur Ω_1.

0 étant intérieur à I, f dérivable en 0 exige $f'_g(0) = f'_d(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Ex. 10

Résoudre l'équation différentielle $\quad y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x} + 1.$

Indications

Il s'agit d'une équation homogène en (x, y).

Solution

La fonction $(x, y) \mapsto \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x} + 1$ est de classe C^1 sur $U_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et sur $U_2 = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(x_0, y_0) \in U_k$, $(k = 1$ ou $2)$, il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle I ouvert, inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ (si $x_0 > 0$) ou $\mathbb{R}_-^*$ (si $x_0 < 0$) et vérifiant $f(x_0) = y_0$.

- Si f est une telle solution maximale, soit $g : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I,\ g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Commentaires

Dans le cas présent la forme même de l'équation impose $I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$.

On peut donc utiliser le changement de fonction inconnue exposé en méthode sans avoir à faire de découpage de l'intervalle comme cela pourra se produire dans d'autres exemples.

On obtient alors $f'(x) = g(x) + xg'(x)$ donc :

$$\forall x \in I, \quad xg'(x) = g(x)^2 + 1$$

c'est-à-dire :
$$\forall x \in I, \quad \frac{g'(x)}{g(x)^2 + 1} = \frac{1}{x}.$$

D'où
$$\operatorname{Arctan} g(x) = \ell n \left| \frac{x}{\lambda} \right|, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

et enfin : $f(x) = x \tan\left(\ell n \left| \frac{x}{\lambda} \right| \right)$ avec :

$$I \subset \left] \lambda\, e^{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \lambda e^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \right[$$

ou

$$I \subset \left] -\lambda e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}, -\lambda\, e^{-\frac{\pi}{2}+k\pi} \right[.$$

- Réciproquement, il est immédiat de vérifier que toute fonction :

$$x \mapsto x \tan\left(\ell n \left| \frac{x}{\lambda} \right| \right)$$

est solution sur $I = \left] \lambda\, e^{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \lambda e^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \right[$

ou sur $I = \left] -\lambda e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}, -\lambda\, e^{-\frac{\pi}{2}+k\pi} \right[.$

Écrivons ce calcul avec la notation différentielle :
en posant $y = f(x)$ et $t = \frac{y}{x} = g(x)$, il vient
$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$
donc $\forall x \in I,\ x\frac{dt}{dx} = t^2 + 1$
d'où aussi $\forall x \in I, \frac{dt}{t^2+1} = \frac{dx}{x}$
et enfin $\operatorname{Arctan} t = \ell n \left| \frac{x}{\lambda} \right|$ $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après l'analyse, ces intervalles sont maximaux les solutions correspondantes sont donc maximales.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

Résoudre l'équation différentielle :

$$(H)\ :\ x^2y'' - 4xy' + (x^2+6)y = 0.$$

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$?

Ex. 2

Résoudre l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ x^2y'' - 2xy' + 2y = x\cos x - \sin x.$$

Ex. 3

Soit $q \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

1) f étant une solution bornée sur $[0,+\infty[$, de $(L) : y'' + qy = 0$, étudier $\lim\limits_{+\infty} f'$.

2) Montrer que (L) a des solutions non bornées.

Ex. 4

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Résoudre le système différentiel $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX$ **(1)**

Ex. 5

Résoudre le système différentiel :

$$(S)\quad \begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z \\ y' = -x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

Niveau 2

Ex. 6

Résoudre l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ (1+x^2)y'' + xy' + k^2y = 0,\quad k \in \mathbb{R}_+^*$$

au moyen d'un changement de variable qui la ramène à une équation à coefficients constants.

Ex. 7

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \geqslant f(x) + \frac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$$

$f(0) = f'(0) = 0$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$.

Ex. 8

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, antisymétrique non nulle, et l'équation différentielle : $\quad (H)\ :\ X' = AX$.

1) Quelles sont les solutions constantes de (H) ?

2) Montrer que toutes les solutions sont bornées puis que les courbes intégrales sont des arcs de cercle.

Ex. 9

Soit $(E) : y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

1) Trouver la solution maximale vérifiant $f(0) = 1$.

2) En déduire les autres solutions et reconnaître les courbes intégrales.

Ex. 10

Soit f la solution maximale de $(E)\ :\ y' = y^2 + x$ vérifiant $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est développable en série entière.

2) Montrer que f est définie sur un intervalle majoré.

Niveau 3

Ex. 11

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant x + a^2 x \int_0^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t \quad (I)\ (a \geqslant 0)$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{f(x)}{x} \leqslant e$.

Ex. 12

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

2) En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Ex. 13

Soit $y\ :\ I \to \mathbb{R}$ la solution de l'équation différentielle $(E)\ : 2y'' = 1 - 3y^2$ telle que $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

1) Justifier son existence et vérifier que y est une fonction paire.

2) Décrire cette solution lorsque $x \in [0, a]$ où :

$$a = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u^2)}}.$$

3) Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$ et périodique.

Indications

Ex. 6

Voir *Mise en œuvre*, exercice 3.

Ex. 7

Avec $g\ : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$ et $h = f - g$, les hypothèses se ramènent à $h'' - h \geqslant 0$, $h(0) = h'(0) = 0$.

Puis, voir *Mise en œuvre*, exercice 4.

Ex. 8

$\operatorname{Ker} A$ est une droite vectorielle.

Ex. 9

Exploiter le théorème de Cauchy-Lipschitz ; introduire $t = \dfrac{y}{x}$. Utiliser des homothéties de centre O. Reconnaître les courbes intégrales par leur équation polaire.

Ex. 10

1) Procéder par identification :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = x + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2$$

et vérifier que la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Si $x \geqslant 1$, $y' \geqslant y^2 + 1$.

Ex. 11

Introduire h définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$.

Puis, voir *Mise en œuvre*, exercice 4.

Ex. 12

Montrer que :

$$f\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t \text{ et } g\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une même équation différentielle.

Ex. 13

2) Multiplier les deux membres de (E) par y'.

3) Étudier $Y \mapsto \displaystyle\int_0^Y \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u^2)}}$.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

L'équation (H) vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur les intervalles :

$$I_1 =]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad I_2 =]0, +\infty[.$$

Chacun des espaces $S_k(H)$: ensemble des solutions de (H) sur I_k, ($k = 1$ ou 2), est de dimension 2.

Cherchons les solutions développables en série entière.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $\rho > 0$ et de somme f.

f est solution de (H) sur $]-\rho, \rho[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-\rho, \rho[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

donc si et seulement si $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 4, (n-2)(n-3)a_n + a_{n-2} = 0 \quad (\mathfrak{R})$.

De la relation $(\mathfrak{R})$ on déduit : $\rho = +\infty$ et

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_{2n} = (-1)^{n-1}\frac{a_2}{(2n-2)!} \quad , \quad a_{2n+1} = (-1)^{n-1}\frac{a_3}{(2n-1)!}.$$

Il en résulte que les solutions développables en série entière sont les fonctions :

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2 \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

avec $f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-2)!} = x^2\cos x \quad , \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!} = x^2 \sin x$

chacun des couples $\left(f_{1|I_k}, f_{2|I_k}\right)$, ($k = 1$ ou 2), est libre et constitue donc une base de $S_k(H)$.

Ainsi $S_k(H)$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \lambda x^2 \cos x + \mu x^2 \sin x$, $\quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On vérifie facilement que toute fonction f telle que :

$$f(x) = \lambda x^2 \cos x + \mu x^2 \sin x \ \text{ si } x < 0 \quad , \quad f(x) = \lambda' x^2 \cos x + \mu' x^2 \sin x \ \text{ si } x \geqslant 0$$

est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda' = \lambda$.

L'espace $S_{\mathbb{R}}(H)$ des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est donc de dimension 3, une base en est $\left(f_1, f_2, f_3\right)$ avec :

$f_1(x) = x^2 \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$f_2(x) = x^2 \sin x$ si $x < 0$ et

$f_2(x) = 0$ si $x \geqslant 0$;

$f_3(x) = 0$ si $x < 0$ et

$f_3(x) = x^2 \sin x$ si $x \geqslant 0$.

Ex. 2

Les fonctions $x \mapsto -\frac{2}{x}$, $x \mapsto \frac{2}{x^2}$, $x \mapsto \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ sont continues sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'ensemble S_k des solutions de (E) sur I_k ($I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, +\infty[$) est un $\mathbb{R}$-espace affine dont la direction est l'espace vectoriel des solutions de (H) sur I_k avec :

$$(H) \ : \quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

(H) est une équation d'Euler, elle admet des solutions de la forme $x \mapsto |x|^\alpha$.

Par identification, on trouve $\alpha = 1$ ou 2, donc sur I_1 et sur I_2 la solution générale de (H) est définie par $x \mapsto \lambda x + \mu x^2$.

- Résolution de (E) sur I_k, ($k = 1$ ou 2), par la méthode de variation des constantes.

Pour tout $y \in C^2(I_k, \mathbb{R})$, il existe un couple unique $(u, v) \in C^1(I_k, \mathbb{R})^2$ tel que :

$$\forall x \in I_k, \quad \begin{cases} y = xu + x^2 v \\ y' = u + 2xv \end{cases}$$

Alors y est solution de (E) sur I_k si et seulement si :

$$\forall x \in I_k, \quad \begin{cases} xu' + x^2 v' = 0 \\ u' + 2xv' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} \end{cases}$$

Ce système fournit $u' = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$, $v' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$, d'où :

$$u = \lambda - \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad v = \mu + \int_0^x \frac{t\cos t - \sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

(Remarquer que la fonction $\varphi \ : \ t \mapsto \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^3}$ est prolongeable par continuité en 0 avec $\varphi(0) = -\dfrac{1}{3}$.)

Compte tenu de $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sin t - t\cos t}{t^2} = 0$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t\cos t - \sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\sin t - t\cos t}{2t^2}\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\cos x}{2x} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On en déduit que la solution générale de (E) sur I_k s'écrit :

$$f_{\lambda,\mu} \ : \ x \mapsto \lambda x + \mu x^2 - \frac{\sin x}{2} - \frac{x\cos x}{2} - \frac{x^2}{2}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

- Solutions sur $\mathbb{R}$

Les dérivées sur I_k de $y \ : \ x \mapsto \lambda x + \mu x^2 - \dfrac{\sin x}{2} - \dfrac{x\cos x}{2} - \dfrac{x^2}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont :

$$y' = \lambda + 2\,\mu\, x - \cos x - x\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad , \quad y'' = 2\,\mu - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ tels que :

$$f_{|I_1} = f_{\lambda_1,\mu_1} \quad \text{et} \quad f_{|I_2} = f_{\lambda_2,\mu_2}$$

f' devant être continue en 0, on a $\lambda_1 - 1 = \lambda_2 - 1$ donc $\lambda_1 = \lambda_2$.

Le calcul précédent montre que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f''(x) = \mu_1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f''(x) = \mu_2$$

donc l'existence de $f''(0)$ nécessite $\mu_2 = \mu_1$.

En conclusion, toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme :

$$x \mapsto \lambda x + \mu x^2 - \frac{\sin x}{2} - \frac{x\cos x}{2} - \frac{x^2}{2}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On vérifie que toute fonction de cette forme est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Ex. 3

1) Pour tout $x \geqslant 0$, on a $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f'' = f'(0) - \int_0^x qf$.

Posons $M = \|f\|_\infty^{[0,+\infty[}$, alors $\forall x \in [0,+\infty[, \quad |q(x)f(x)| \leqslant M\,|q(x)|$, donc l'intégrabilité de q sur $[0,+\infty[$ donne celle de qf, et il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x qf$ existe, donc qu'il existe $\ell = \lim\limits_{+\infty} f'$.

Notons maintenant que $\forall x \geqslant 0, f(x) = f(0) + \int_0^x f'$.

Si ℓ était non nul, on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f' = \pm\infty$ (avec le signe de ℓ) et f serait non bornée. Donc $\ell = \lim\limits_{+\infty} f' = 0$.

2) L'ensemble $\mathcal{B}_L$ des solutions bornées de L est un sous-espace vectoriel de $S(L)$.

Si y_1 et y_2 sont deux éléments de $(\mathcal{B}_L)$, on a $y_1''y_2 - y_2''y_1 = 0$ c'est-à-dire $(y_1'y_2 - y_2'y_1)' = 0$.

On en déduit que $y_1'y_2 - y_2'y_1$ est constante sur $[0,+\infty[$, or d'après le 1), $\lim\limits_{+\infty} y_1'y_2 - y_2'y_1 = 0$, donc cette constante est nulle.

Ainsi, on a sur $[0,+\infty[$, $y_1'y_2 - y_2'y_1 = 0$ et le couple (y_1, y_2) est lié.

On en déduit $\dim \mathcal{B}_L \leqslant 1$, donc $S(L) \setminus \mathcal{B}_L$ est non vide, c'est-à-dire qu'il existe des solutions non bornées.

Ex. 4

Posons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$. Le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3 \end{cases} \text{(1')} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4 \end{cases} \text{(1'')}.$$

Le système (1') est équivalent à :

$$\begin{cases} x_1' + x_3' = 6(x_1 + x_3) \\ x_1' - x_3' = 2(x_1 - x_3) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} u' = 6u \\ v' = 2v \end{cases} \quad (\text{avec } u = x_1 + x_3\,,\ v = x_1 - x_3).$$

On en déduit :

$$u = \lambda e^{6t} \quad , \quad v = \mu e^{2t} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

et :

$$x_1 = \alpha e^{6t} + \beta e^{2t} \quad , \quad x_3 = \alpha e^{6t} - \beta e^{2t} \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On a de même pour le système (1'') $\quad x_2 = \gamma e^{6t} + \delta e^{2t}$, $x_4 = \gamma e^{6t} - \delta e^{2t}$, $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$.

Ex. 5

Matriciellement (S) s'écrit :

$$X' = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Réduction de la matrice A

On obtient $\quad \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)^3$.

1 est valeur propre triple, A n'est pas diagonalisable, (sinon $A = I_3$), par contre elle est trigonalisable.

En notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on voit que $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})$ est le plan d'équation $x + y - z = 0$ donc $\operatorname{rg}(u - \operatorname{Id}) = 1$.

Remarquons que $u - \operatorname{Id}$ est nilpotent (car d'après Cayley-Hamilton $(A - I_3)^3 = 0$), donc :

$$\operatorname{rg}(u - \operatorname{Id})^2 < \operatorname{rg}(u - \operatorname{Id}) \text{ ce qui donne } \operatorname{rg}(u - \operatorname{Id})^2 = 0$$

et donc :

$$\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}).$$

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ étant (e_1, e_2, e_3), on constate que $e_1 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, posons donc :

$$e_1' = e_1 \quad , \quad e_2' = (u - \mathrm{Id})(e_1 big) = 2e_1 - e_2 + e_3 \quad , \quad e_2' \text{ est un vecteur de } \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}).$$

Avec $e_3' = e_1 + e_3$, (e_2', e_3') est une base du plan $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$ et (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ et, on a par construction :

$$\operatorname*{mat}_{(e_i')} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

Donc, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = T$.

- Application à S.

On opère le changement de fonctions inconnues défini par $X = PX_1$ et (S) devient :

$$(S_1) \quad X_1' = TX_1.$$

Soit en développant :

$$(S_1) \ : \ \begin{cases} x_1' = x_1 & (1) \\ y_1' = x_1 + y_1 & (2) \\ z_1' = z_1 & (3) \end{cases}$$

(1) et (3) donnent $x_1 = a\,e^t$, $z = c\,e^t$,

donc (2) devient $y_1' = y_1 + a\,e^t$ ce qui donne $y_1 = (at + b)e^t$.

On en déduit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\,e^t \\ (at + b)e^t \\ c\,e^t \end{pmatrix}$.

$$x = (2at + a + 2b + c)e^t \quad , \quad y = (-at - b)e^t \quad , \quad z = (at + b + c)e^t.$$

Niveau 2

Ex. 6

L'équation (E) satisfait aux conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur $\mathbb{R}$. L'ensemble S des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, est un plan vectoriel inclus dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On recherche un changement de variable défini par $x = \varphi(t)$ où φ est un C^∞ difféomorphisme de I sur $\mathbb{R}$ (I intervalle à déterminer).

Étant donnée $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $g = f \circ \varphi$ et il vient :

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} g'(t), \quad f''(x) = \frac{1}{\varphi'^2(t)} g''(t) - \frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} g'(t),$$

donc $f \in S$ si et seulement si :

$$\frac{1 + \varphi^2}{\varphi'^2} g'' + \left(\frac{\varphi}{\varphi'} - \frac{(1 + \varphi^2)\varphi''}{\varphi'^3} \right) g' + k^2 g = 0 \quad (\text{sur } I).$$

Choisissons alors φ telle que $\dfrac{\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi^2}} = 1$. Une solution est $\varphi \ : \ t \mapsto \mathrm{Argsh}\, t$. Cette fonction φ est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même tel que $\varphi^{-1} = \mathrm{sh}$.

Avec ce changement de variable, on obtient que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de :

$$(E') \ : z'' + k^2 z = 0.$$

La solution générale de (E') étant $t \mapsto \lambda \cos kt + \mu \sin kt$, on en déduit que S est décrit par les fonctions :

$$f_{\lambda,\mu} \ : x \mapsto \lambda \cos(k\,\mathrm{sh}\,x) + \mu \sin(k\,\mathrm{sh}\,x), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Ex. 7

Considérons la fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$. Le calcul donne $g''(x) - g(x) = \dfrac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$.

Donc avec $h = f - g$, l'hypothèse se lit : $h'' - h \geqslant 0$, $h(0) = h'(0) = 0$.

Sachant que h est, tout comme f, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, la condition $h'' - h \geqslant 0$ équivaut à l'existence de $\varphi \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ positive et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ h''(x) - h(x) = \varphi(x).$$

Utilisons alors la méthode de variation des constantes : puisque $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de $y'' - y = 0$, il existe u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} h(x) = u(x)\operatorname{ch} x + v(x)\operatorname{sh} x \\ h'(x) = u(x)\operatorname{sh} x + v(x)\operatorname{ch} x \end{cases}$$

et en écrivant que h est solution de $y'' - y = \varphi(x)$, il vient :

$$\begin{cases} u'(x)\operatorname{ch} x + v'(x)\operatorname{sh} x = 0 \\ u'(x)\operatorname{sh} x + v'(x)\operatorname{ch} x = \varphi(x). \end{cases}$$

On en déduit $u'(x) = -\,\varphi(x)\operatorname{sh} x$, $v'(x) = \varphi(x)\operatorname{ch} x$, puis :

$$u(x) = a - \int_0^x \varphi(t)\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t,\ \ v(x) = b + \int_0^x \varphi(t)\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t,$$

et enfin, compte tenu de $h(0) = h'(0) = 0$, $h(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\operatorname{sh}(x-t)\mathrm{d}t$.

La positivité de φ, avec $\operatorname{sh}(x-t) \geqslant 0$ pour $t \in [0, x]$ si $x > 0$ et $\operatorname{sh}(x-t) \leqslant 0$ pour $t \in [0, x]$ si $x < 0$, donne alors celle de h et l'inégalité annoncée en résulte.

Ex. 8

1) Il est classique que pour n impair, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $\det A = 0$, car on a :

$$\det{}^tA = \det A \ \text{ et } \ \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A.$$

Montrons de plus que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de A et $U \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé :

$$AU = \lambda U \tag{1}$$

De **(1)** on déduit :

$${}^t\overline{U}AU = \lambda\,{}^t\overline{U}U \tag{2}$$

puis en transconjuguant, compte tenu de ${}^t\overline{A} = -A$:

$${}^t\overline{U}AU = -\overline{\lambda}\,{}^t\overline{U}U \tag{3}$$

Donc, avec **(2)** et **(3)**, il vient :

$$\left(\lambda + \overline{\lambda}\right){}^tUU = 0 \tag{4}$$

Or ${}^t\overline{U}U = \|U\|^2$ (norme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^3$) et puisque U est non nul, on a ${}^t\overline{U}U > 0$ donc, avec **(4)**, on obtient :

$$\overline{\lambda} = -\lambda \ \text{ c'est-à-dire } \ \lambda \in i\mathbb{R}.$$

Avec $\det A = 0$ et $\operatorname{Sp} A \subset i\mathbb{R}$, et puisque $A \neq 0$, on a ici :

$$\operatorname{Sp} A = \{0, i\lambda, -i\lambda\} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

(A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mais ne l'est pas dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

Notons encore A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, X est solution constante si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) \in \operatorname{Ker} A.$$

$\operatorname{Ker} A$ étant une droite : $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect} U$, les solutions constantes sont les fonctions $X_\lambda\ :\ t \mapsto \lambda U$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Soit X une solution non constante. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad {}^tX(t)\,X'(t) = {}^tX(t)\,AX(t) = 0 \text{ car } A = -{}^tA$$

donc il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \| X(t) \|^2 = {}^tX(t)\,X(t) = R$$

(il s'agit maintenant de la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^3$), ce qui prouve que X est bornée.

De plus, on a $\forall t \in \mathbb{R},\ {}^tUX'(t) = {}^tU\,AX(t) = {}^t\left({}^tU\,AX(t)\right) = -{}^tX(t)AU = 0$ c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \left\langle U \,\middle|\, X'(t)\right\rangle = 0.$$

Il en résulte $\forall t \in \mathbb{R},\ \left\langle U \,\middle|\, X(t)\right\rangle = k$ (constante).

La courbe intégrale Γ_X appartient donc à l'intersection de la sphère de centre O et de rayon R et du plan :

$$P = \left\{X \in \mathbb{R}^3 / \left\langle U \,\middle|\, X\right\rangle = k\right\}$$

Γ_X est un arc de cercle.

Ex. 9

1) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur chaque ouvert :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y - x > 0\} \quad \text{et} \quad \Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y - x < 0\}.$$

Notons $y : I \to \mathbb{R}$ la solution maximale de (E) vérifiant $y(0) = 1$, (son support est inclus dans Ω) et posons :

$$I' = I \cap]-\infty, 0[\quad , \quad I'' = I \cap]0, +\infty[.$$

Sur I' ou I'', la fonction $t : x \mapsto \dfrac{y}{x}$ est dérivable, le calcul donne :

$$y' = (xt)' = xt' + t = \frac{1+t}{1-t} \quad , \quad xt' = \frac{1+t^2}{1-t} \quad , \quad \frac{1}{x} = \frac{1-t}{1+t^2}\cdot t'$$

donc il existe λ' et λ'' réels non nuls tels que :

$$\text{pour } x \in I' \ :\ x = \lambda' \frac{e^{\operatorname{Arctan} t}}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{et pour } x \in I'' \ :\ x = \lambda'' \frac{e^{\operatorname{Arctan} t}}{\sqrt{1+t^2}} \quad (\text{donc } \lambda' < 0 \quad \text{et} \quad \lambda'' > 0).$$

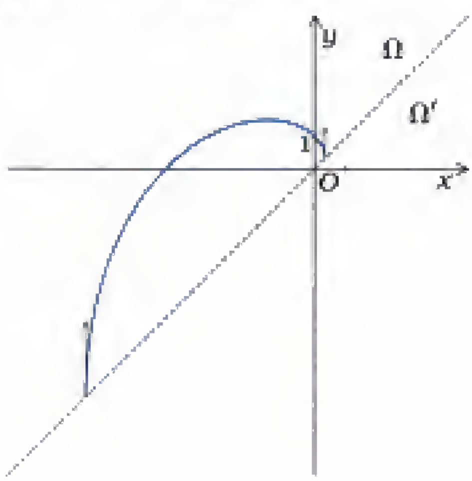
- **Étude quand x tend vers 0**

De $t = \dfrac{y}{x}$, on déduit : $t(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$, d'où :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} t(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} t(x) = +\infty$$

puis :

$$\lambda' \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{|t(x)|} \underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{\sim} x \ ,\quad \lambda'' \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{t(x)} \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\sim} x \quad \text{d'où} \quad \lambda' = -e^{\frac{\pi}{2}}, \text{ et } \lambda'' = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$



Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors :

$$g''(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}. \qquad (2)$$

- Montrons que $f = g$.

D'après (1) et (2), $f - g$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle homogène $y'' + y = 0$. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) - g(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

Pour prouver $\lambda = \mu = 0$, étudions les limites de f et g en $+\infty$.

Sachant que quel que soit $a > 0$, les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ sont convergentes, on peut écrire pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u - x)}{u}\,du = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$$

et, puisque les restes d'intégrales convergentes tendent vers 0, il vient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Pour la seconde limite on a de façon immédiate :

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Ainsi la fonction $f - g$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est 2π-périodique et de limite nulle en $+\infty$.

2) Puisque f et g sont continues en 0, l'égalité $f(x) = g(x)$ reste vraie en ce point. Alors :

$$f(0) = g(0) \text{ donne } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ex. 13

1) C'est une application du théorème de Cauchy-Lipschitz d'ordre deux :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, y') \mapsto \frac{1}{2}\left(1 - 3y^2\right)$$

f est de classe C^1. Il existe une unique solution maximale $y : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$; I est ouvert.

Soit $I' = \{x \in \mathbb{R} / -x \in I\}$ et $z : I' \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(-x)$.

On vérifie que z est solution de (E) sur I', avec $z(0) = z'(0) = 0$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il en résulte que $z = y$, $I' = I$.

Ainsi y est une fonction paire.

2) Une première intégration se fait en multipliant par y' :

$$2y'y'' = y' - 3y^2y' \quad \text{donne} \quad y'^2 = y - y^3 \quad (\text{car } y(0) = y'(0) = 0).$$

Comme $y\left(1 - y^2\right) \geqslant 0$, $y(I)$ est un intervalle inclus dans $]-\infty, -1] \cup [0, 1]$, et puisqu'il contient 0, on a finalement $y(I) \subset [0, 1]$.

Comme $y''(0) = \dfrac{1}{2}$, on a $y'(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \alpha[$, $y'(x) > 0$ et donc :

$$y'(x) = \sqrt{y(1 - y^2)}\ ,\quad \frac{y'}{\sqrt{y(1 - y^2)}} = 1\ ,\quad \int_0^{\alpha} \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)(1 - y^2(t))}}\,dt = \int_0^{y(\alpha)} \frac{du}{\sqrt{u(1 - u^2)}} = \alpha.$$

Sachant que $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u(1 - u^2)}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, en posant $a = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1 - u^2)}}$ on a $\alpha \leqslant a$.

En choisissant $\alpha = \sup\{x \geqslant 0 / y'(t) > 0$ pour tout $t \in]0, x[\}$, y est croissante sur $[0, \alpha[$, majorée donc $\beta = \lim\limits_{x \to \alpha} y(x)$ existe.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique au point $(x_0, y_0, y_0') = \left(\alpha, \beta, \sqrt{\beta(1 - \beta^2)}\right)$ donc $\alpha \in I$ (ouvert), y se prolonge au-delà de α.

Comme α est une borne supérieure, on a :

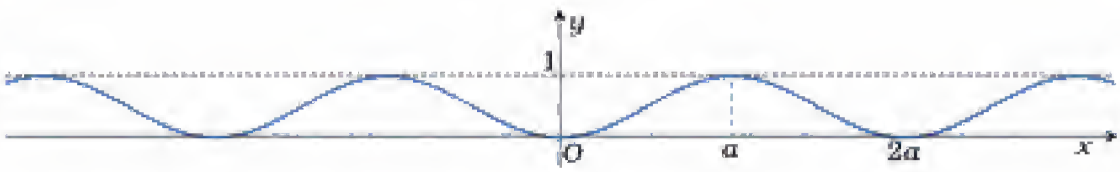
$$y'(\alpha) = 0,\ y(\alpha) = 1 \text{ et } \alpha = a.$$

Ce dernier point tient à la croissance stricte de la fonction :

$$h : [0,1] \to [0,a],\ Y \mapsto X = \int_0^Y \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u^2)}}$$

dérivable sur $]0,1[$: $h'(Y) = \dfrac{1}{\sqrt{Y(1-Y^2)}}$; h est une bijection.

Ainsi, pour $x \in [0,a]$, $y(x)$ est donné par $x = \displaystyle\int_0^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u^2)}} = h\big(y(x)\big)$ autrement dit $y(x) = h^{-1}(x)$.



La fonction y est désormais connue sur $[-a, a]$ (y est paire).

Elle se prolonge au-delà puisque (E) a une solution au point $\left(x_0 = a,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0\right)$.

La fonction $z : x \mapsto y(x - 2a)$ est solution de (E) (équation incomplète en x), elle vérifie :

$$z(a) = y(-a) = y(a) = 1,\ z'(a) = y'(-a) = 0.$$

Par unicité du problème de Cauchy en $(x_0, y_0, y_0') = (a, 1, 0)$, les fonctions y et z sont identiques : $y(x) = y(x - 2a)$. Ainsi y est définie sur $\mathbb{R}$ et de période $2a$.

CHAPITRE

9 Fonctions de plusieurs variables réelles Calcul différentiel

Conventions

n et p sont des entiers naturels non nuls.

Dans ce chapitre, on étudie des fonctions de E dans F où E et F sont deux espaces vectoriels normés réels de dimensions finies : $\dim E = n$, $\dim F = p$. (1)

(1) Le cas usuel est $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ avec $n \leqslant 3$, $p \leqslant 3$.

Les espaces E et F étant rapportés aux bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}'_F = (e'_1, \dots, e'_p)$, une fonction $f : E \to F$ d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ se représente par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad f(x) = \sum_{j=1}^{p} f_j(x) e'_j .$$

Si les bases $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}'_F$ de F sont fixées, on peut convenir de noter :

$$x = \sum_{x=1}^{n} x_i e_i = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{p} y_j e'_j = (y_1, y_2, \dots, y_p)$$

et f se représente alors par $\quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$ ou encore :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \big(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$$

C'est la notation usuelle lorsque $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, ces espaces étant rapportés à leurs bases canoniques ; on dit alors que f est **une fonction de n variables réelles.** (2)

(2) On dispose ainsi de notations identiques pour représenter les fonctions de E dans F et les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

A. Fonctions continûment différentiables

1. Dérivées partielles

1.1 – Applications partielles

Définition 1

Soit $f : E \to F$ d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. L'espace E étant rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, soit $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ un élément de $\mathcal{D}_f$.

Les **fonctions partielles de f** en a suivant la base $\mathcal{B}$ (3) sont :

$$f_{a,i} : \mathbb{R} \to F, \quad t \mapsto f\big(a + (t - a_i) e_i\big) \quad i \in [\![1, n]\!].$$

L'ensemble de définition de $f_{a,i}$ est :

$$\mathcal{D}_{f_{a,i}} = \big\{ t \in \mathbb{R} \ / \ a + (t - a_i) e_i \in \mathcal{D}_f \big\}.$$

(3) Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, les fonctions partielles de f en a sont par défaut les fonctions partielles sur la base canonique.

Remarques

1) Si $\mathcal{D}_f$ est un voisinage de a, alors $\mathcal{D}_{f_{a,i}}$ est un voisinage de a_i dans $\mathbb{R}$.

2) Si la base $\mathcal{B}$ est fixée sans ambiguïté, les $f_{a,i}$ seront simplement appelées fonctions partielles de f en a.

3) $f_{a,i}$ se définit aussi par : $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

1.2 – Continuité

Théorème 1

Si f est continue en a, chacune de ses fonctions partielles $f_{a,i}$ est continue en a_i. (4)

(4) **Remarque.** Ce théorème exprime une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que f soit continue en a.

☞ Utiliser $\quad f_{a,i}(t) = f\big(a + (t - a_i) e_i\big)$ et la composition des fonctions continues.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}.$$

Définition 5

Si $D_j f(a)$ existe en tout point a de U, on définit la $j^{\text{ième}}$ **fonction dérivée partielle**, suivant la base $\mathcal{B}$, de f sur U par :

$$D_j f : U \to F, \quad a \mapsto D_j f(a) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to F, \quad a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Remarques

1) Si la base $\mathcal{B}$ de E est fixée sans ambiguïté, on dira plus simplement j^e dérivée partielle de f en a ou j^e fonction dérivée partielle de f sur U.
2) Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, les dérivées partielles de f en a ou fonctions dérivées partielles de f sur U sont par défaut définies par rapport à la base canonique.

Propriété 1

f est définie par la donnée de ses p fonctions composantes $f_1, \ldots, f_p$ sur $\mathcal{B}'_p$, base de F.

Pour tout $a \in U$ et tout $v \in E \setminus \{0\}$, f admet une dérivée en a suivant le vecteur v si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i admet en a une dérivée suivant le vecteur v, et alors :

$$D_v f(a) = \sum_{i=1}^{p} D_v f_i(a) e'_i.$$

f est de classe C^1 sur U si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i est de classe C^1 sur U.

☞ Ce sont là des propriétés relatives à la dérivation des fonctions vectorielles d'une variable réelle.

Propriété 2

Linéarité des dérivations partielles

L'ensemble $C^1(U, F)$ des fonctions de E dans F de classe C^1 sur U est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, F)$.

Pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, l'application $D_v : C^1(U, F) \to C^0(U, F), \; f \mapsto D_v f$ est linéaire.

☞ Cela résulte aussi des propriétés des fonctions d'une variable réelle et on a :

$$D_v(\lambda f + \mu g) = \lambda D_v f + \mu D_v g.$$

Propriété 3

Fonctions de dérivée partielle nulle

E étant rapporté à la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, notons E_j le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(e_i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}}$.

Si U est convexe et si f admet sur U une $j^{\text{ième}}$ fonction dérivée partielle $D_j f$ identiquement nulle sur U, alors il existe $g : E_j \to F$ telle que :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \in U, \quad f(x) = g(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n). \text{ ✎}^{(7)}$$

✎ (7) On pourra retenir que si U est convexe et si $\forall x \in U$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ alors $f(x)$ « ne dépend pas de x_j ».

$x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i$ est noté $(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ et $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} x_i e_i$ est noté $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

☞ Il s'agit en fait de montrer que l'on a $f(x) = f(x')$ pour tout couple (x, x') de points de U,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad x' = \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i, \text{ tels que } \forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}, \quad x_i = x'_i.$$

U étant convexe, le segment $[x, x']$ est inclus dans U, donc la fonction :

$$\varphi : [0, 1] \to F, \quad t \mapsto f\left(x + t(x'_j - x_j)e_j\right)$$

est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée est identiquement nulle. Il en résulte qu'elle est constante sur $[0, 1]$, et on a donc $\varphi(0) = \varphi(1)$ c'est-à-dire $f(x) = f(x')$.

On est ainsi ramené à un problème de fonction d'une variable réelle.

2. Fonction différentiable en un point

2.1 – Fonction différentiable

Définition 6

Deux fonctions f et g de E dans F définies sur V voisinage de $a \in E$ sont dites **tangentes en** a si $f(a) = g(a)$ et $f(x) - g(x) = o(x - a)$ quand x tend vers a, c'est-à-dire si :

$$f(a) = g(a) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - g(x)}{\| x - a \|} = 0.$$

Définition 7

Soit $f : E \to F$ définie sur V voisinage de $a \in E$.
f est dite **différentiable en** a s'il existe φ_a, application affine de E dans F, telle que f et φ_a soient tangentes en a.

D'après la définition 6, on a alors $\varphi_a(a) = f(a)$, donc, si ψ_a est la partie linéaire de φ_a, il vient : $\forall x \in E, \quad \varphi_a(a + x) = f(a) + \psi_a(x)$.

Théorème 2

$f : E \to F$ étant définie sur V voisinage de $a \in E$, f est différentiable en a si et seulement si il existe $\psi_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a + h) = f(a) + \psi_a(h) + o(h) \quad \text{quand } h \text{ tend vers } 0.$$

Propriété 4

Si f est différentiable en a, f est continue en a.

E étant de dimension finie, ψ_a est continue, d'où $\lim_{h \to 0} \psi_a(h) = 0$.

Propriété 5

Si f est différentiable en a, f admet en a une dérivée suivant tout vecteur v non nul de E.

En effet, $f(a + tv) = f(a) + t\,\psi_a(v) + o(tv)$ donne :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \psi_a(v) \quad \text{c'est-à-dire} \quad D_v f(a) = \psi_a(v).$$

Propriété 6

Si f est différentiable en a, l'application linéaire ψ_a est définie de manière unique.
Elle est appelée **différentielle de** f **en** a et notée df_a.
Pour tout vecteur v non nul de E, on a donc : $D_v f(a) = df_a(v)$.

Ces notions (fonction différentiable en a, différentielle en a) sont invariantes par changement de norme dans E ou F.
En effet E (resp. F) étant de dimensions finies, toutes les normes sur E (resp. F) sont équivalentes, et les limites sont invariantes par changement de norme.

E étant rapporté à la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \psi_a(e_i) = D_i f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Ainsi, ψ_a est l'unique application linéaire de E dans F définie par :

$$\forall h \in E, \quad h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i, \quad \psi_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Notation 1

En calcul différentiel, on note $(dx_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E, $dx_i : h \mapsto h_i$. Il vient alors :

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i.$$

Propriété 7

Cas où $E = \mathbb{R}$

f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a et alors df_a est définie par :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad df_a(h) = hf'(a) \quad \text{ou} \quad df_a = f'(a)dx.$$

Les deux propositions se traduisent en effet par :

$$\exists A \in F, \ f(a+h) = f(a) + hA + o(h) \quad (A = f'(a)).$$

Exemple 3 Soit $f : E \to F$ définie sur un voisinage de 0 avec $f(x) = o(x)$.

Montrer que f est différentiable en 0. Calculer df_0.

Il suffit de constater que f et l'application nulle (de E dans F) sont tangentes en 0.

Donc f est différentiable en 0 avec : $df_0 = 0$.

Exemple 4 $E = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg P \leqslant n\}$.

Montrer que $f : P \mapsto \displaystyle\int_0^1 \sin\big(t\,P(t)\big)\mathrm{d}t$ est différentiable en tout point P de E.

Pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$, posons $\varphi(x, h) = \sin(x+h) - \sin x - h\cos x$: φ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a $|\varphi(x,h)| \leqslant \dfrac{h^2}{2}$. Formons alors

$$f(P+Q) - f(P) = \int_0^1 \Big[\sin\big(t\,P(t) + t\,Q(t)\big) - \sin\big(t\,P(t)\big)\Big]\,\mathrm{d}t$$

$$f(P+Q) - f(P) = \int_0^1 t\,Q(t)\cos\big(t\,P(t)\big)\mathrm{d}t + \int_0^1 \varphi\big(t\,P(t), t\,Q(t)\big)\mathrm{d}t.$$

L'application $\quad L : Q \mapsto \displaystyle\int_0^1 t\,Q(t)\cos\big(t\,P(t)\big)\mathrm{d}t \quad$ est évidemment linéaire.

Avec, par exemple, $\| Q \| = \left(\displaystyle\int_0^1 Q^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$, et :

$$\left|\int_0^1 \varphi\big(t\,P(t), t\,Q(t)\big)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^2Q^2(t)}{2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 Q^2(t)\mathrm{d}t,$$

il vient $\quad |f(P+Q) - f(P) - L(Q)| \leqslant \dfrac{1}{2}\| Q \|^2$, donc :

$$f(P+Q) = f(P) + L(Q) + o(Q).$$

En conclusion, f est différentiable en P avec $df_P = L$.

Théorème 3

Linéarité de la différentiation

Si $f : E \to F$ et $g : E \to F$ sont différentiables en $a \in E$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a avec :

$$d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$$

$\mathcal{D}_a(E, F)$, ensemble des fonctions de E dans F différentiables en a, est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies au voisinage de a.

En effet : $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h)$ avec $df_a \in \mathcal{L}(E,F)$

$g(a+h) = g(a) + dg_a(h) + o(h)$ avec $dg_a \in \mathcal{L}(E,F)$

donne : $(\lambda f + \mu g)(a+h) = (\lambda f + \mu g)(a) + (\lambda df_a + \mu dg_a)(h) + o(h)$

avec $\lambda df_a + \mu dg_a \in \mathcal{L}(E, F)$.

2.2 – Matrice jacobienne

Théorème 4

F est rapporté à une base $(e'_i)_{1\leq i\leq p}$, les composantes de f sur cette base sont notées $f_1, f_2, \dots, f_p$.

f est différentiable en a si et seulement si chaque f_i, $1 \leq i \leq p$, est différentiable en a.

On a alors $(df_i)_a = (df_a)_i$, c'est-à-dire que la différentielle en a de la $i^{\text{ième}}$ composante de f est la $i^{\text{ième}}$ composante de la différentielle en a de f.

- Si f est différentiable en a, on a $f(a+h) - f(a) = \psi_a(h) + o(h)$.

Donc, en introduisant les composantes $(\psi_a)_i$ de ψ_a, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad f_i(a+h) - f_i(a) = (\psi_a)_i(h) + o(h).$$

Ainsi, f_i est différentiable en a avec $(df_i)_a = (\psi_a)_i = (df_a)_i$.

- Inversement, si chaque f_i est différentiable en a, posons $\psi_a = \sum_{i=1}^{p} (df_i)_a e'_i$.

On a alors $f(a+h) - f(a) = \psi_a(h) + o(h)$; donc f est différentiable en a.

Définition 8

Matrice jacobienne

Si f est différentiable en a, la matrice de df_a, par rapport au couple de bases $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ de E, et $(e'_i)_{1\leq i\leq p}$ de F, est appelée matrice jacobienne de f en a.

On la note $J_f(a)$ et on a $J_f(a) = \left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

(i : indice de ligne ; j : indice de colonne).

En effet $df_a(e_j) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)e'_i$.

Définition 9

Jacobien

On suppose $E = F$, $(e'_i)_{1\leq i\leq n} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$.

Le déterminant de $J_f(a)$ (c'est-à-dire aussi le déterminant de df_a) est appelé jacobien ou **déterminant fonctionnel** de f en a.

On le note $\dfrac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a) = \det J_f(a)$.

2.3 – Gradient d'une fonction numérique

Définition 10

On suppose ici que E est un espace vectoriel euclidien et que $F = \mathbb{R}$. [8]

$f : E \to \mathbb{R}$ étant différentiable en a, il existe un unique vecteur de E appelé le **gradient** de f en a et noté $\operatorname{grad} f(a)$ tel que :

$$\forall h \in E, \quad df_a(h) = \langle \operatorname{grad} f(a) \mid h \rangle.$$

C'est une conséquence du fait que df_a appartient au dual de E qui est canoniquement isomorphe à E (voir Algèbre – Géométrie, Espaces euclidiens).

Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormale de E, on a $\operatorname{grad} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)e_i$.

[8] Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ on considère que, par défaut, cet espace est muni de sa structure euclidienne canonique, c'est-à-dire du produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée.

On obtient alors :

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |h_j| M_j \leqslant \| h \| \sum_{j=1}^{n} M_j$$

d'où finalement $f(a+h) - f(a) - \psi_a(h) = o(h)$.

Ainsi f est différentiable sur U.

Il reste à prouver que f est de classe C^1 sur U.

On sait déjà que, pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, f admet en tout point a de U une dérivée suivant le vecteur u : $Df_u(a) = df_a(u)$.

En posant $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, on a donc $Df_u(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i$ ainsi la continuité sur U de $a \mapsto Df_u(a)$ résulte de celle des n dérivées partielles $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Théorème 6

Une fonction $f : E \to F$, définie sur U ouvert de E, est de classe C^1 sur U si et seulement si étant donné $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ base de E, f admet par rapport à cette base n dérivées partielles $D_i f$ (ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}$) continues sur U.

Corollaire du théorème 5.

Théorème 7

Soit $f : E \to F$ définie sur U ouvert de E, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f est de classe C^1 sur U,

(2) pour tout $a \in U$, f est différentiable en a et l'application $a \mapsto df_a$ définie sur U à valeurs dans $\mathcal{L}(E, F)$ est continue sur U,

(3) il existe une application $\ell : U \to \mathcal{L}(E, F)$ continue sur U telle que pour tout a de U :

$$f(a+h) - f(a) = \ell(a)(h) + o(h) \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

Il est clair que **(2)** $\iff$ **(3)** par définition de la différentiabilité de f.

(1) $\Rightarrow$ **(2)** Si f est de classe C^1 sur U alors, d'après le théorème 5, elle est différentiable en tout point de U et l'application $a \mapsto df_a = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) dx_i$ est continue.

(2) $\Rightarrow$ **(1)** Si f est différentiable sur U avec $a \mapsto df_a$ continue sur U, pour tout $v \in E \setminus \{0\}$ et tout $a \in U$, f admet en a une dérivée suivant v : $D_v f(a) = df_a(v)$, et la continuité sur U de $a \mapsto df_a$ donne celle de $a \mapsto D_v f(a)$.

Définition 11

Une fonction $f : E \to F$ de classe C^1 sur U est aussi dite **continûment différentiable** sur U. L'application $a \mapsto df_a$ de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ est appelée **différentielle** de f et notée df, elle est continue sur U. (11)

(11) **Remarque** : attention à la rigueur des notations :
$df_a \in \mathcal{L}(E,F)$
tandis que :
$df \in C^0(U, \mathcal{L}(E,F))$

Exemples

- Si f est constante sur U, la proposition **(3)** du théorème 7 est vérifiée avec ℓ fonction nulle de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, f est donc continûment différentiable sur U avec $df = 0$.
- Si f est la restriction à U d'une application linéaire φ, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, la proposition **(3)** du théorème 7 est vérifiée avec, pour tout a de U, $\ell(a) = \varphi$, f est donc continûment différentiable sur U avec $\forall a \in U$, $df_a = \varphi$.

Ω_2 est un ouvert de F contenant 0 et f est continue en a, donc il existe B boule ouverte non vide de centre 0 dans E, $B \subset \Omega_1$ telle que $\quad \forall h \in B,\ u(h) = f(a+h) - f(a) \in \Omega_2$.

Avec $\quad b + u(h) = f(a+h) \quad$ et $\quad u(h) = df_a(h) + \varepsilon_1(h)\| h \|$, la relation (2) donne :

$$\forall h \in B, \quad g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)\big) + dg_b \circ df_a(h) + \varepsilon_3(h)\| h \| \tag{3}$$

où on a posé $\quad \varepsilon_3(h) = dg_b\big(\varepsilon_1(h)\big) + \varepsilon_2\big(u(h)\big)\dfrac{\| u(h) \|}{\| h \|} \quad$ pour $h \neq 0$ et $\varepsilon_3(0) = 0$.

Il est clair que $\quad \lim\limits_{h \to 0} dg_b\big(\varepsilon_1(h)\big) = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2\big(u(h)\big) = 0$.

(13) E étant de dimension finie, toutte application linéaire de E dans F est continue et $||| df_a |||$ est la norme de df_a subordonnée aux normes choisies dans E et F.

D'autre part la continuité de df_a (13) donne $\forall x \in E,\ \| df_a(x) \| \leqslant ||| df_a ||| \, \| x \|$ d'où :

$$\frac{\| u(h) \|}{\| h \|} \leqslant \left\| df_a\left(\frac{h}{\| h \|}\right) \right\| + \| \varepsilon_1(h) \| \leqslant ||| df_a ||| + \| \varepsilon_1(h) \|.$$

On en déduit que $\quad h \mapsto \dfrac{\| u(h) \|}{\| h \|} \quad$ est bornée au voisinage de 0, donc que $\quad \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_3(h) = 0$.

La relation (3) donne alors : $\ g \circ f(a+h) = g \circ f(a) + dg_b \circ df_a(h) + o(h)$, ce qui prouve que $g \circ f$ est différentiable en a avec : $\ d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

Enfin, la continuité de $\varphi\ : U \to \mathcal{L}(E, G),\ \ a \mapsto dg_{f(a)} \circ df_a$ en tout point a de U résulte de la majoration :

$$|||\varphi(a') - \varphi(a)||| \leqslant |||dg_{f(a')} - dg_{f(a)}|||\ |||df_{a'}||| + |||dg_{f(a)}|||\ |||df_{a'} - df_a|||,$$

ainsi que de la continuité de df en a, de dg en $f(a)$ et de f en a.

(14) On conserve les hypothèses du théorème 8.

Corollaire 1

Jacobienne d'une fonction composée (14)

Pour tout a de U, les matrices jacobiennes vérifient :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big)\, J_f(a).$$

Exemple 7 Étant donnés $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, $\ a \in U\ $ et $\ v \in E \setminus \{0\}$, retrouver la dérivée de $\varphi\ : t \mapsto f(a + tv)$.

U contient une boule ouverte $B(a, r)$, $r > 0$, donc φ est définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ contenant $]-r, r[$ et, pour tout $t \in]-r, r[$, $\ \varphi'(t)$ est la dérivée de f en $a + tv$ suivant le vecteur v : $\ \varphi'(t) = df_{a+tv}(v)$.

Le théorème précédent nous donne une autre méthode pour atteindre ce résultat.

Avec $g\ : t \mapsto a + tv$, $\ $ on a $\ \varphi = f \circ g$.

Or g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-r, r[$ avec $\forall t \in]-r, r[$, $\ dg_t\ : h \mapsto hv$ donc, puisque $g\big(]-r, r[\big) \subset U$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-r, r[$ telle que $\forall t \in]-r, r[$, $\ d\varphi_t\ : h \mapsto df_{a+tv} \circ dg_t(h)$ soit $d\varphi_t(h) = h\, df_{a+tv}(v)$. Il en résulte $\varphi'(t) = df_{a+tv}(v)$.

Corollaire 2

Composition des dérivations partielles

Soit $\quad f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $E \quad$ et $\quad g : F \to \mathbb{R}\quad$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V ouvert de F tel que $\quad f(U) \subset V$.

Les espaces E et F étant rapportés à des bases fixées $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(e'_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$, on note :

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \big(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$$

$$g : (y_1, y_2, \ldots, y_p) \mapsto g(y_1, y_2, \ldots, y_p)$$

Alors en tout point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de U, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}\big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)\big)\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

C'est une conséquence de l'égalité matricielle $\quad J_{g \circ f}(x) = J_g\big(f(x)\big)\, J_f(x) \quad$ où :

$$J_{g\circ f}(x) = \left[\frac{\partial g\circ f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g\circ f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial g\circ f}{\partial x_n}(x)\right] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$$

$$J_g\big(f(x)\big) = \left[\frac{\partial g}{\partial y_1}\big(f(x)\big), \frac{\partial g}{\partial y_2}\big(f(x)\big), \frac{\partial g}{\partial y_p}\big(f(x)\big)\right] \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$$

$$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Corollaire 3

Composition des différentielles : méthode pratique

Soit $f:\ E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E

et $\ g:\ F \to G$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V ouvert de F avec $f(U) \subset V$.

Les espaces E, F et G étant rapportés à des bases fixées $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $(e'_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$, $(e''_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$, on note :

$$f : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto y = (y_1, \dots, y_p)$$

$$g : y = (y_1, \dots, y_p) \mapsto z = (z_1, \dots, z_q)$$

Alors, f_i, $i \in [\![1, p]\!]$, étant les fonctions composantes de f on a :

$$dg = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, p]\!],\ df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

et
$$d(g\circ f) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j .$$

On obtient donc $d(g\circ f)$ en remplaçant dans dg les dy_i par les df_i.

Corollaire 4

Différentielle d'un produit, d'un inverse

a) Soit $f:\ E \to F$ et $g:\ E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E.

Alors fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U avec :

$$\forall x \in U \quad d(fg)_x = g(x)df_x + f(x)dg_x \tag{1}$$

b) Soit $f:\ E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E et $a \in U$ tel que $f(a) \neq 0$.

Alors il existe V ouvert de E tel que $\{a\} \subset V \subset U$ et $0 \notin f(V)$, $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V avec :

$$\forall x \in V \quad d\left(\frac{1}{f}\right)_x = \frac{-1}{f^2(x)} df_x . \tag{2}$$

a) On peut écrire $fg = P \circ \Phi$ avec :

$$\left\{\begin{array}{llll}\Phi : & E & \to & F\times\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \big(f(x), g(x)\big)\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{llll}P : & F\times\mathbb{R} & \to & F \\ & (y,\lambda) & \mapsto & \lambda y\end{array}\right.$$

Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, il en est de même pour Φ. (15)

(15) Pour vérifier ce fait il suffit d'étudier les dérivées partielles de Φ.

D'autre part on a vu que P est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $F\times\mathbb{R}$ (cf. les exemples suivant le théorème 7) donc, $fg = P\circ\Phi$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème 8.

De plus, sachant que $d\Phi_x$, et $dP_{(y,\lambda)}$, sont définies par :

$$\left\{\begin{array}{llll}d\Phi_x : & E & \to & F\times\mathbb{R} \\ & h & \mapsto & \big(df_x(h), dg_x(h)\big)\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{llll}dP_{(y,\lambda)} : & F\times\mathbb{R} & \to & F \\ & (u,\mu) & \mapsto & \lambda u + \mu y\end{array}\right.$$

avec $d(fg)_x = dP_{\left(f(x),g(x)\right)} \circ dF_x$, on obtient :

$$d(fg)_x \ :\ E \to F,\ h \mapsto g(x)\ df_x(h) + dg_x(h)f(x) \qquad \text{d'où } \mathbf{(1)}.$$

b) f est continue en a donc il existe V ouvert tel que $\{a\} \subset V \subset U$, $0 \notin f(V)$.

La propriété annoncée s'obtient, comme ci-dessus, par application du théorème 8, en écrivant :

$$\frac{1}{f} = I \circ f \quad \text{avec} \quad I\ :\ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ t \mapsto \frac{1}{t}.$$

B. Dérivées partielles d'ordre supérieur

1. Fonctions de classe C^k – Théorème de Schwarz

$f : E \to F$ est supposée définie sur U ouvert de E.

L'espace E est rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Définition 12

On suppose que f admet sur U une $j^{\text{ième}}$ fonction dérivée partielle, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Si $D_j f$ admet en a une $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle $D_k(D_j f)(a)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, on dit que f admet en a une $(k, j)^{\text{ième}}$ **dérivée partielle seconde** notée :

$$D^2_{k,j} f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}(a).$$

$$D^2_{k,j} f(a) = D_k\big(D_j f\big)(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a).$$

On peut alors définir, si c'est possible, les fonctions dérivées partielles secondes, puis, en itérant le procédé, les dérivées partielles et fonctions dérivées partielles triples, etc.

Notation 2

$$f'_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = D_j f$$

$$f''_{x_k x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = D^2_{k,j}$$

$\ldots \quad \ldots$

$$f^{(q)}_{x_{j_q} \cdots x_{j_2} x_{j_1}} = \frac{\partial^q f}{\partial x_{j_q} \ldots \partial x_{j_2} \, \partial x_{j_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_q}}\left(\frac{\partial^{q-1} f}{\partial x_{j_{q-1}} \ldots \partial x_{j_2} \, \partial x_{j_1}}\right).$$

Définition 13

Rappelons que f est dite de classe C^0 sur U si elle est continue sur U.

On dit que f est de **classe** C^k, ($k \in \mathbb{N}^*$), sur U lorsque, quel que soit $(j_1, \ldots, j_k) \in [\![1, n]\!]^k$, f admet une $(j_k, \ldots, j_1)^{\text{ième}}$ fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \ldots \partial x_{j_1}}$ continue sur U.

On dit que f est de **classe** C^∞ sur U lorsque, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, f est de classe C^k sur U.

Propriété 8

$f : E \to F$ est de classe C^k sur U si et seulement si ses p fonctions composantes sur la base $\mathcal{B}'$ de F sont de classe C^k sur U.

(16) La démonstration est hors programme.

Théorème 9

Théorème de Schwarz (16)

Soit $f : E \to F$ admettant sur U ouvert de E des fonctions dérivées partielles secondes $D^2_{i,j} f$ et $D^2_{j,i} f$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$.

Si ces fonctions sont continues en $a \in U$, alors :

$$D^2_{i,j} f(a) = D^2_{j,i} f(a).$$

Corollaire 1

Soit $f : E \to F$ de classe C^2 sur U ouvert de E.

Alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :

$$D^2_{i,j} f = D^2_{j,i} f \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}.$$

Corollaire 2

Si $f : E \to F$ est de classe C^k sur U, pour tout $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$ et toute permutation σ de $[\![1, k]\!]$, on a :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}\, \partial x_{i_{\sigma(2)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}}.$$

f étant de classe C^k sur U, tout calcul de fonction dérivée partielle d'ordre inférieur ou égal à k peut se faire dans un ordre arbitraire, ordre qui n'a donc pas à apparaître dans la notation.

On écrit par exemple $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2\, \partial x^2}$ pour $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y\, \partial x\, \partial y\, \partial x}$.

Exemple 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0).$$

Montrer l'existence des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)$.

Que peut-on déduire de ce calcul ?

$x \neq 0,\quad \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$ d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,$

$y \neq 0,\quad \dfrac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \dfrac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y.$

De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x.$

On en déduit :

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1, \quad \text{donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0) = -1,$$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 1, \quad \text{donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) = 1.$$

Par ailleurs, f admet, évidemment, des dérivées partielles secondes en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il résulte donc du théorème de Schwarz que l'une au moins des deux fonctions :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

est non continue en $(0,0)$. (en fait, les deux sont non continues par raison d'antisymétrie).

2. Opérations sur les fonctions de classe C^k

Propriété 9

L'ensemble $C^k(U, F)$ des fonctions de E dans F de classe C^k sur U est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, F)$.

☞ C'est immédiat en notant que, pour tout $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$, on a :

$$\frac{\partial^k(\lambda f + \mu g)}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = \lambda \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} + \mu \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

Propriété 10

Produit de fonctions de classe C^k

Si $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ sont de classe C^k sur U, la fonction produit fg est de classe C^k sur U. ✎ (17)

✎ (17) **Remarque** : on a des résultats analogues pour tous les produits usuels :
- une fonction vectorielle par une fonction numérique,
- produit scalaire de deux fonctions vectorielles, etc.

☞ Démonstration par récurrence en utilisant : $\forall i \in [\![1, n]\!],\quad \dfrac{\partial (fg)}{\partial x_i} = f\dfrac{\partial g}{\partial x_i} + g\dfrac{\partial f}{\partial x_i}.$

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

Propriété 11

Inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et si a est un point de U tel que $f(a) \neq 0$, il existe V ouvert de E tel que : $\{a\} \subset V \subset U$, $0 \notin f(V)$ et $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur V.

☞ L'existence de V résulte de la continuité de f en a. On a de plus :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

ce qui permet une démonstration par récurrence.

Propriété 12

Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^m$, $m \geq 1$

Si $f : E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^m$ sur U ouvert de E et $g : F \to G$ de classe $\mathcal{C}^m$ sur V ouvert de F tel que $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^m$ sur U.

☞ ▪ Il suffit de montrer que les composantes $(g \circ f)_k$, $1 \leq k \leq q$, de $g \circ f$ dans la base $(e''_k)_{1 \leq k \leq q}$ de G sont de classe $\mathcal{C}^m$. Or, $(g \circ f)_k = g_k \circ f$; on est donc ramené à démontrer la proposition dans le cas où $q = 1$.

▪ Procédons par récurrence.

Le résultat est acquis pour $m = 1$. Supposons la propriété vraie pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^m$, et supposons f et g de classe $\mathcal{C}^{m+1}$. Leurs fonctions dérivées partielles sont alors de classe $\mathcal{C}^m$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, les $\dfrac{\partial g}{\partial y_j} \circ f$ sont de classe $\mathcal{C}^m$. On en déduit que les $\left(\dfrac{\partial g}{\partial y_j} \circ f\right)\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ sont de classe $\mathcal{C}^m$, propriété 10, et donc que les :

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f\right)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{sont de classe } \mathcal{C}^m.$$

Ainsi, $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$: la propriété annoncée est récurrente.

Exemple 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de $F = f \circ g$.

En déduire l'expression de $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (Laplacien de f) en fonction des dérivées partielles de F.

On a ici $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ d'où :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta \end{cases}$$ ✎ (18)

✎ (18) Dans ces formules, pour alléger l'écriture, nous notons : $\frac{\partial F}{\partial r}$ pour $\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, ...

Pour la suite, E et F sont deux espaces vectoriels normés de même dimension n.

Le théorème 10 est admis.

Théorème 10

Caractérisation des C^k-difféomorphismes

Soit U un ouvert de E et f une application injective de classe C^1 de U dans F.

Alors, $V = f(U)$ est un ouvert et f définit un difféomorphisme de U dans V si et seulement si, quel que soit $a \in U$, df_a est inversible.

2. Changement de variables

Problème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $(k \geqslant 1)$, sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$:

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto y = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Supposons disposer de $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ induisant un difféomorphisme de V sur U :

$$\varphi : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_n))$$

(ce fait pourra, par exemple, être mis en évidence au moyen du théorème 10).

La fonction $g = f \circ \varphi$ est alors de classe C^1 sur V et on désire calculer les dérivées partielles de f en fonction de celle de g.

- On a $f = g \circ \varphi^{-1}$ et la difficulté tient au fait que l'on ne sait, en général, pas expliciter φ^{-1}.

On pourra, pour calculer les dérivées partielles de φ^{-1}, inverser la matrice $J_\varphi(u)$:

en posant $\quad \psi = \varphi^{-1} \quad$ on a $\quad J_\psi(x) = \left[\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x)\right] = \left(J_\varphi(u)\right)^{-1}$

$x = (x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u), u = (u_1, \ldots, u_n)$.

On utilisera ensuite : $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial g}{\partial u_j}(u)\dfrac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x) \quad u = \psi(x)$.

- Une autre méthode consiste à écrire les formules :

$$\frac{\partial g}{\partial u_i}(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i}(u) \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

et observer qu'il s'agit là, pour tout $u \in V$, d'un système de Cramer aux inconnues $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$; le déterminant n'est autre que le jacobien de φ en u.

Exemple 10 Étude du changement de variable défini par :

$$x = r\cos\theta \;,\quad y = r\sin\theta$$

$\varphi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une bijection de classe C^∞ de :

$$V =]0, +\infty[\times] - \pi, +\pi[\quad \text{sur} \quad U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)/x \leqslant 0\}.$$

Son jacobien est $\det J_\varphi(r, \theta) = r$ (cf. exemple 6), donc, par application du théorème 10, φ est un C^∞-difféomorphisme de V sur U.

Étant donné $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de $g = f \circ \varphi$.

- Première méthode

$J_\varphi(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ d'où $J_\psi(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$.

Ainsi $\quad \dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \;,\; \dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \;,\; \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r} \;,\; \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{r}$ et :

Corollaire 1

Soit U un ouvert **convexe** de E et $f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telle qu'il existe M majorant de $\{|||\, df_x \,|||\, / x \in U\}$, alors f est lipschitzienne, donc uniformément continue de U.

La convexité de U donne que, pour tout $(a, b) \in U^2$, on a $[a, b] \subset U$, donc, d'après le théorème 11 : $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\| b - a\|$.

Définition 15

Un ouvert U est dit **étoilé** lorsqu'il existe $x_0 \in U$ tel que, pour tout x de U :

$$[x_0, x] \subset U.$$ [23]

[23] Un ouvert convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Corollaire 2

Soit U un ouvert **étoilé** de E et f une application de U dans F.
f est constante si et seulement si df_x est nulle pour tout $x \in U$.

On sait déjà que si f est constante sur U, elle est continûment différentiable sur U avec :

$$\forall x \in U, df_x = 0.$$

La réciproque est une conséquence immédiate du théorème 11 et du fait que :

$$\forall x \in U, \left[x_0, x\right] \subset U.$$

Exemple 11 Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ab \neq 1$, exprimer $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$ en fonction de :

$$\operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab}$.

f est continûment différentiable sur l'ouvert $U = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab \neq 1\right\}$ avec :

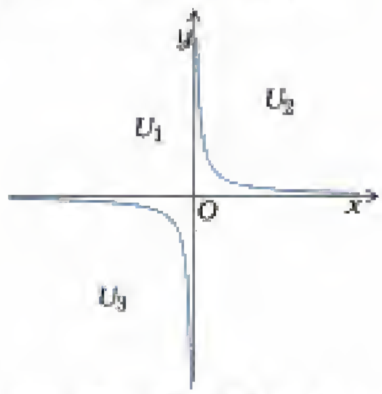
$$\forall (a, b) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 0 \quad \text{donc} \quad df_{(a,b)} = 0.$$

On a $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$.

$$U_1 = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab < 1\right\}$$

$$U_2 = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab > 1, a > 0\right\}$$

$$U_3 = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab > 1, a < 0\right\}$$



U_1, U_2 et U_3 sont des ouverts comme images réciproques d'ouverts par des fonctions continues.

Par exemple $U_2 = \Phi^{-1}(]1, +\infty[\times]0, +\infty[)$ avec $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, b) \mapsto (ab, a)$.

Comme l'application $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est convexe, on en déduit que U_2 est convexe donc étoilé et, par symétrie, il en est de même pour U_3.

U_1 est étoilé car, pour tout $m = (a, b) \in U_1$, on a $\left[O, m\right] \subset U_1$.

Le corollaire 2 du théorème 11 donne alors que $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, f est constante sur U_k, donc :

$$\forall (a, b) \in U_1, \ f(a, b) = f(0, 0) = 0$$

$$\forall (a, b) \in U_2, \ f(a, b) = \lim_{a \to +\infty} f(a, a) = \pi$$

$$\forall (a, b) \in U_3, \ f(a, b) = \lim_{a \to -\infty} f(a, a) = -\pi$$

L'essentiel

I. Différentiabilité

Rappelons que seules les fonctions de classe C^1 sont au programme.

✔ **Si l'on veut** prouver qu'une fonction $f : E \to F$ définie sur U ouvert de E est continûment différentiable sur U,

- **on peut** montrer que f admet sur U, par rapport à une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, n fonctions dérivées partielles continues sur U.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 1
- **on peut** en revenant à la définition, mettre en évidence pour tout $a \in U$ l'existence d'une application linéaire ℓ_a telle que :
  $$f(a+h) - f(a) = \ell_a(h) + o(h).$$
  On vérifiera ensuite que l'application $a \mapsto \ell_a$ est continue sur U.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

II. Équations aux dérivées partielles

✔ **Si l'on veut** résoudre une équation aux dérivées partielles d'une fonction f,

- **on peut** penser à utiliser un changement de variable qui la transforme en une équation simple. Par exemple, on résoud facilement les équations :
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ avec la propriété 3 ;
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = h(x)$ (h donnée) en se ramenant au cas précédent grâce à une primitive de $x_j \mapsto h(x)$;
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) + a(x)f(x) = h(x)$ en la considérant comme équation différentielle linéaire du premier ordre pour la $j^{\text{ième}}$ fonction partielle ;
  - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) = 0$ en utilisant deux fois la propriété 3.

  Sauf indications contraires, on privilégiera les changements de variable linéaires ou polaires (dans $\mathbb{R}^2$).
  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 3,4

III. Extremums

✔ **Si l'on veut** trouver les bornes d'une fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ sur un compact K,

- **on peut**
  - si f est de classe C^1 sur un ouvert U contenant K, déterminer les points critiques de f sur l'intérieur $\mathring{K}$ de K, calculer les bornes de f sur la frontière de K et les comparer avec les valeurs prises par f aux points critiques ;
  - si f est de classe C^1 sur un ouvert U contenant K sauf en certains points, opérer comme ci-dessus en adjoignant à la comparaison les valeurs prises aux points de $\mathring{K}$ où f n'est pas de classe C^1
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 5

Mise en œuvre

I. Différentiabilité

Ex. 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, montrer que $F : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto \displaystyle\int_0^1 f\big(t, P(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Indications

Étudier les dérivées partielles par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution

Écrivons $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la fonction $\big(t, a_k\big) \mapsto f\big(t, P(t)\big)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de dérivation sous le signe somme, dans le cas de l'intégration sur un intervalle compact, donne que la fonction partielle $a_k \mapsto \displaystyle\int_0^1 f\big(t, P(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial F}{\partial a_k}(P) = \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial y}\big(t, P(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Par composition de fonctions continues, on dispose également de la continuité sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_n[X]$ de $(t, P) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(t, P(t)\big)$ donc le théorème de continuité sous le signe somme, dans le cas de l'intégration sur un intervalle compact, donne que :

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} : P \mapsto \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial y}\big(t, P(t)\big)\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } \mathbb{R}_n[X].$$

Il en résulte que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc qu'elle est continûment différentiable, la différentielle étant définie en tout point P par :

$$dF_P : H \mapsto \int_0^1 H(t) \frac{\partial f}{\partial y}\big(t, P(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Commentaires

Noter que l'application du théorème de Leibniz donne seulement la continuité de $a_k \mapsto \frac{\partial F}{\partial a_k}(P)$.

Il y a donc lieu de poursuivre le raisonnement pour obtenir la continuité de $\frac{\partial F}{\partial a_k}$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Ex. 2

Montrer que la fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M\,{}^t M$ est continûment différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indications

Former la différence $f(M + H) - f(M)$

Solution

Pour tout M et H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$f(M + H) - f(M) = M\,{}^t H + H\,{}^t M + H\,{}^t H. \tag{1}$$

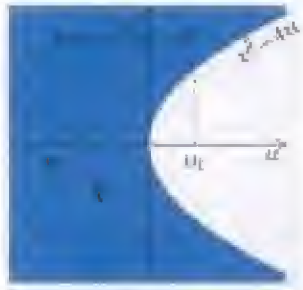
Il est clair que l'application $\ell_M : H \mapsto M\,{}^t H + H\,{}^t M$ est linéaire. Pour conclure il reste donc à montrer que $H\,{}^t H = o(H)$.

Commentaires

2) Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, posons $g = f \circ \Phi^{-1}$: $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$.
On a alors $f = g \circ \Phi$ c'est-à-dire $\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) = g(xy, x + y)$,
et il en résulte :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x + y)$$



Donc f est solution de **(1)** sur U si et seulement si

$$\forall (x, y) \in U,\ (y - x)\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + 3(x - y)g(xy, x + y) = 0$$

soit, si et seulement si

Car sur U, on a $x - y \neq 0$.

$$\forall (u, v) \in V,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 3g(u, v). \qquad \textbf{(2)}$$

L'équation **(2)** est encore équivalente à :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - 3g(u, v)\right)e^{-3u} = 0,$$

donc aussi à $\dfrac{\partial h}{\partial u}(u, v) = 0$ où on a posé $h(u, v) = g(u, v)e^{-3u}$.

On utilise ici la méthode du facteur intégrant pour la résolution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

Remarquons alors que pour tout couple $\big((u_1, v), (u_2, v)\big)$ de points de V, le segment joignant ces deux points est inclus dans V. La condition $\dfrac{\partial h}{\partial u} = 0$ sur V, donne alors pour $u_1 \neq u_2$,

$$h\big(u_2, v\big) - h\big(u_1, v\big) = \frac{1}{u_1 - u_2}\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial h}{\partial u}\Big(tu_1 + (1-t)u_2, v\Big)\mathrm{d}t = 0\,.$$

V n'étant pas convexe, la propriété 3 ne s'applique pas, il est nécessaire de reprendre une démonstration directe.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (u, v) \in V,\ g(u, v) = \lambda(v)e^{3u}$
et les fonctions f cherchées sont définies par $f(x, y) = \lambda(x + y)e^{3xy}$.

Ex. 4

Soit $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\right\}$.
On veut déterminer les applications $f : U \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U telles que :

$$\forall (x, y) \in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}. \qquad \textbf{(1)}$$

1) Étant donné $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on définit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par $g(x + y, x - y) = f(x, y)$.
Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.

2) En déduire les solutions de **(1)**.

Indications

2) Appliquer deux fois la propriété 3.

Solution

1) g est définie sur $V = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / uv > 0\right\}$ par :

$$g(u, v) = f\left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right).$$

ou encore $g = f \circ \varphi$ avec $\varphi\ :\ (u, v) \mapsto (x, y) = \left(\dfrac{u + v}{2}, \dfrac{u - v}{2}\right)$.

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ tout comme f.

Commentaires

U et V sont des ouverts en tant qu'images réciproques de $]0, +\infty[$ par les applications continues $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ et $(u, v) \mapsto uv$ respectivement.

En fait φ induit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de V sur U.

De $f(x,y) = g(x+y, x-y)$, on déduit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Dans ces formules toutes les dérivées de f sont prises au point (x,y) et celles de g au point $(x+y, x-y)$.

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}(x+y, x-y)$

2) φ réalisant une bijection de $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / uv > 0\}$ sur U, le calcul ci-dessus donne :

$$\textbf{(1)} \iff \forall (u,v) \in V, \quad 4\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{uv}}. \qquad \textbf{(2)}$$

On a ici $V = V_1 \cup V_2$ où $V_1 = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $V_2 = (\mathbb{R}_-^*)^2$, sont des pavés de $\mathbb{R}^2$.

Ce sont donc des convexes.

Pour $(u,v) \in V_1$, **(2)** donne successivement, d'après la propriété 3 :

$\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} + \alpha_1(u)$, $\alpha_1 \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ étant arbitraire

$g(u,v) = \sqrt{uv} + A_1(u) + B_1(v)$, A_1 et B_1 étant arbitraires dans $C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

Sur V_1, **(2)** s'écrit $\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 0$ où on a posé $h(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}$.

Sur V_2, **(2)** donne de même $g(u,v) = \sqrt{uv} + A_2(u) + B_2(v)$, avec A_2 et B_2 arbitraires dans $C^2(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R})$.

En posant :

$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x - y > 0,\ x + y > 0\}$$

$$\text{et} \quad U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x - y < 0,\ x + y < 0\}$$

on en déduit que la solution générale de **(1)** est définie par :

$$\forall (x,y) \in U_k, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + A_k(x+y) + B_k(x-y)$$

A_k et B_k étant arbitraires dans :

$$C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{ si } k = 1, \quad C^2(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}) \text{ si } k = 2.$$

III. Extremums

Ex. 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Calculer $\sup\limits_{\Delta} f$ avec $\Delta = [0,1]^2$.

Indications

Si la borne supérieure de f sur Δ est atteinte sur le pavé ouvert $]0,1[^2$, c'est en un point critique.

La considération de $g = \ln f$ apporte une simplification intéressante des calculs.

Exercices

Niveau 1

Différentiabilité

Ex. 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1) Étudier la continuité de f en $(0, 0)$.

2) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Ex. 2

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Montrer que $f : \mathbb{R}^n \setminus (0, 0) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{\|x\|}$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus (0, 0)$.

Calculer $\operatorname{grad} f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \setminus (0, 0)$.

Ex. 3

Soit $f : R^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Montrer que f est linéaire.

Ex. 4

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x, 0) = 0$.

Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y) = y g(x, y).$$

Difféomorphismes

Ex. 5

Soit $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ /\ u - v > 0\}$, et

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^2,\ \ (u, v) \mapsto (u^2 + v^2, u + v).$$

Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de l'ouvert U sur un ouvert V que l'on précisera.

Ex. 6

Monter que :

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ (u, v) \mapsto \left(u + \frac{1}{2}\cos v, v + \frac{1}{2}\cos u\right)$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même.

Ex. 7

Soit $\Phi : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3 \to \mathbb{R}^3,\ \ (x, y, z) \mapsto (u, v, w)$,

avec $(u, v, w) = (x + z^2, y + x^2, z + y^2)$.

1) Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ sur $\operatorname{Im} \Phi$.

2) On note x, y, z les composantes de Φ^{-1}.

Calculer $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ et $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$.

Équations aux dérivées partielles

Ex. 8

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (E)$$

On pourra utiliser un changement de variable linéaire.

Ex. 9

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x + y > 0\}$.

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in D,\ \ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$$

Extremums

Ex. 10

Étudier les extremums de :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ (x, y) \mapsto e^{x \sin y}.$$

Ex. 11

1) Étudier les extremums de :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ (x, y) \mapsto xy^2 + \ln\left(4 + y^2\right).$$

2) On pose $\Omega = [0, 1] \times \mathbb{R}$. Étudier les extremums de f sur Ω.

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 12

Étant donnée $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) = \int_0^x \left(\int_0^y f(u, v)\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex. 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, X \mapsto \det X$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et trouver sa différentielle.

Ex. 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que l'application :

$$F : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad M \mapsto M^{-1}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Calculer sa différentielle.

Ex. 15

Soit $k \in]0, 1[$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant k.$$

Montrer que :

$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (u, v) \mapsto \big(u + f(v), v + f(u)\big),$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Ex. 16

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et

$a = (x_0, y_0, z_0) \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) \neq 0$.

On admet que, dans ces conditions, il existe un pavé ouvert $P = I \times J \times K$ contenant a, et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I \times J, K)$ tels que :

$$\forall (x, y, z) \in P, \quad f(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y),$$

et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}\big(x, y, \varphi(x, y)\big) \neq 0.$

1) Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U contenant a. Montrer que, pour que

$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto g\big(x, y, \varphi(x, y)\big)$ présente un extremum local en a, il est nécessaire qu'en ce point on ait :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(a) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial z}(a) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(a) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial z}(a) \end{cases}$$

2) Application

Trouver les extremums de :

$g(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z$

où x, y, z sont liés par $x + y + z = 3\alpha$, $\alpha > 0$.

Avec éléments de solution

Ex. 17

Soit f une application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On dit que f est homogène de degré α lorsque :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que si f est homogène de degré α, alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

2) Étudier la réciproque
3) Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et telles que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + 2y^4}.$$

Ex. 18

Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} y}$.

Trouver $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f\big(u(x, y)\big)$$

ait un laplacien nul.

Ex. 19

Soit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x - y^2 > 0\}$.

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ vérifiant sur V :

$$2(y^2 - x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^2 + x = 0.$$

On pourra utiliser le changement de variable défini par :

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u + v.$$

Ex. 20

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, df_x est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que la différentielle df est constante.
2) En déduire que f est une isométrie de $\mathbb{R}^n$.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) Munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique et notons :

$$r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Puisque $\left(x^2+y^2\right)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4 \geqslant x^4+y^4$, on a $0 \leqslant f(x,y) \leqslant r^2$.

Donc $\lim\limits_{r\to 0} f(x,y) = 0$ et f est continue en $(0,0)$.

2) En tant que rapport de deux polynômes qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x\left(x^4+2x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ et, puisque $f(x,0) = x^2$, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x} = 0.$$

On remarque alors que pour $(x,y) \neq 0$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \frac{2\,|x|\,(x^4+2x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2\,|x|,$$

donc $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

De même puisque f est symétrique, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex. 2

Posons $U = \mathbb{R}^n \setminus (0,0)$.

La base canonique étant orthonormale, pour tout $x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \in U$, on a : $\quad f(x) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Donc, par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{u}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\psi : \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, $f = \varphi \circ \psi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a alors : $\quad \forall x \in U, \ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -x_j\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{x_j}{\|x\|^3}$.

En notant $\left(e_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e_j = -\frac{x}{\|x\|^3}.$$

Ex. 3

Pour une application linéaire u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, on a : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ du_x = u$.

Nous allons donc conclure en montrant que $f = df_0$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, considérons l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p, \ \ \lambda \mapsto f(\lambda x)$.

h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $h'(\lambda) = df_{\lambda x}(x)$. Mais puisque $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, on a aussi $h'(\lambda) = f(x)$.

Pour $\lambda = 0$ on en déduit en particulier $f(x) = df_0(x)$.

Ceci étant vrai quel que soit x, on obtient $f = df_0$ ce qui prouve que f est linéaire.

Soit alors (x, y, z) et (x', y', z') dans $(\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que $\Phi(x, y, z) = \Phi(x', y', z')$.

En supposant $x' \geqslant x$, $z^2 - z'^2 = x' - x$ avec z et z' positifs donne $z \geqslant z'$ et, de même, avec $y'^2 - y^2 = z - z'$, il vient $y' \geqslant y$ et enfin, $x^2 - x'^2 = y' - y$ fournit $x \geqslant x'$. Il en résulte finalement $x = x'$, d'où aussi :

$$y' = y \text{ et } z' = z.$$

On a ainsi montré que Φ est injective, et elle définit donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme et a fortiori $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ sur $\Phi\left((\mathbb{R}_+^*)^3\right)$.

2) **Remarque** : les notations utilisées dans ce texte consistent à nommer x, y, z les fonctions coordonnées de Φ^{-1}. C'est une pratique courante mais non dénuée de dangers.

Avec $(u, v, w) = \Phi(x, y, z)$, la jacobienne de Φ^{-1} au point (u, v, w) est $\left(J_\Phi(x, y, z)\right)^{-1}$ c'est-à-dire que :

$$J_{\Phi^{-1}}(u, v, w) = \frac{1}{1 + 8xyz}\begin{pmatrix} 1 & 4yz & -2z \\ -2x & 1 & 4xz \\ 4xy & -2y & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) = \dfrac{1}{1 + 8xyz}$, puis de même :

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) = \frac{-2x}{1 + 8xyz} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) = \frac{4xy}{1 + 8xyz}.$$

En notant $1 + 8xyz = D$, $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ pour $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u, v, w)$, et de même pour les autres dérivées, on obtient alors par composition des dérivations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{D}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial z}{\partial u} \\ &= -\frac{8yz}{D^3} + \frac{16x^2z}{D^3} - \frac{32x^2y^2}{D^3}. \end{aligned}$$

Ensuite, le théorème de Schwarz permet de permuter les dérivations et il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{D}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial z}{\partial v} \\ &= -\frac{32y^2z^2}{D^3} - \frac{8xz}{D^3} + \frac{16xy^2}{D^3}. \end{aligned}$$

Ex. 8

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (u, v) = (ax + by, cx + dy)$.

Avec $ad - bc \neq 0$, Φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, posons $g = f \circ \Phi^{-1}$; il vient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(ax + by, cx + dy).$$

g est également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= a\frac{\partial g}{\partial u} + c\frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= b\frac{\partial g}{\partial u} + d\frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= a^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ac\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= ab\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (ad + bc)\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + cd\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= b^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2bd\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + d^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{aligned}$$

(dans ces formules, toutes les dérivées de f sont prises au point (x, y) et celles de g au point $(ax + by, cx + dy)$).

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(a^2 - 4ab + 3b^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(c^2 - 4cd + 3d^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \left(2ac - 4ad - 4bc + 6bd\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}.$$

donc, en choisissant a, b, c, d tels que :

$$a^2 - 4ab + 3b^2 = c^2 - 4cd + 3d^2 = 0,$$

nous allons obtenir une équation du type $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = 0$.

On prend par exemple $a = 1,\ \ b = 1,\ \ c = 3,\ \ d = 1$ ce qui donne bien $ad - bc \neq 0$, et alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v},$$

donc f est solution de (E) si et seulement si g est solution de :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = 0 \qquad (E').$$

D'après la propriété 33, les solutions de (E') sont les fonctions g telles que :

$$g(u, v) = h(u) + k(v)$$

où h et k sont arbitraires dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et celles de (E) sont donc les fonctions f telles que :

$$f(x, y) = h(x + y) + k(3x + y).$$

Ex. 9

Remarquons tout d'abord que $x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$.

Donc, avec $x^2 - xy + y^2 = \dfrac{1}{4}(x + y)^2 + \dfrac{3}{4}(x - y)^2$, on voit que pour tout $(x, y) \in D,\ \ x^3 + y^3 > 0$.

La forme de l'équation (E) proposée peut faire penser à utiliser un passage en polaires.

Posons alors $\Delta = \left]0, +\infty\right[\times \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$, l'application $\Phi\ :\ \Delta \to D,\ \ (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de Δ sur D dont le jacobien ne s'annule pas sur Δ.

D'après le théorème 10, Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Δ sur D.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$, posons $g = f \circ \Phi$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ et $\forall (r, \theta) \in \Delta,\ \ g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Le calcul est classique (voir exemple 9 du cours) et donne avec des notations simplifiées :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

puis :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r\frac{\partial g}{\partial r}.$$

Ainsi f est solution du problème si et seulement si g est solution sur Δ de l'équation :

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos^3\theta + \sin^3\theta}. \qquad (E')$$

(E') est encore équivalente à :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r^{\frac{1}{2}}\sqrt{\cos^3\theta + \sin^3\theta},$$

ses solutions sont donc les fonctions g de la forme :

$$(r, \theta) \mapsto \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos^3\theta + \sin^3\theta} + \lambda(\theta)$$

où λ est arbitraire dans $\mathcal{C}^1\left(\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[, \mathbb{R}\right)$.

Pour en déduire f, explicitons Φ^{-1}.

Ex. 16

1) Les points critiques de G sont définis par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)+\dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)+\dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \quad \text{où on a posé } z=\varphi(x,y).$$

D'autre part, l'identité $\forall(x,y)\in I\times J,\ f\big(x,y,\varphi(x,y)\big)=0$, avec $\dfrac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\neq 0$, donne en dérivant par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)}\quad ,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)}.$$

La conclusion en résulte.

2) Application

$f(x,y,z)=x+y+z-3\alpha$, l'équation $f(x,y,z)=0$ définit évidemment z en fonction de (x,y), et on peut ici expliciter :

$$\varphi\ :(x,y)\mapsto z=3\,\alpha-x-y$$

ce qui permet de faire une étude directe de la recherche des extremums de G :

$$G:(x,y)\mapsto x\,\ell n\,x+y\,\ell n\,y+(3\,\alpha-x-y)\,\ell n(3\,\alpha-x-y).$$

Nous allons procéder différemment :

- la condition (1) s'écrit $\quad 1+\ell n\,x=1+\ell n\,y=1+\ell n\,z$

on en tire $x=y=z$, G a donc un seul extremum possible ; en (α,α,α).

- Posons alors $\quad x=\alpha+u,\quad y=\alpha+v,\quad z=\alpha+w,$

la condition $\quad x+y+z=3\alpha\quad$ donne $\quad u+v+w=0.$

On obtient $\quad\begin{cases} \ell n(\alpha+u)=\ell n\,\alpha+\dfrac{u}{\alpha}-\dfrac{u^2}{2\alpha^2}+o\big(u^2\big) \\ (\alpha+u)\,\ell n(\alpha+u)=\alpha\,\ell n\,\alpha+u(1+\ell n\,\alpha)+\dfrac{u^2}{2\alpha}+o\big(u^2\big) \end{cases}$

d'où $\quad g(x,y,z)=3\,\alpha\,\ell n\,\alpha+\dfrac{1}{2\alpha}\big(u^2+v^2+w^2\big)+o\big(u^2+v^2+w^2\big).$

Ainsi, il est clair que f atteint en (α,α,α) un minimum local et strict de valeur $3\,\alpha\,\ell n\,\alpha$.

Ex. 17

1) Soit $\varphi\ :\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ telle que $\varphi(t)=f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y)$. On a :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \ \varphi'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=\alpha t^{\alpha-1}f(x,y).$$

Pour $t=1$ on obtient l'identité annoncée.

2) L'identité du **1)** donne $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \ t\,\varphi'(t)=\alpha\,\varphi(t)$ d'où $\varphi(t)=\lambda t^{\alpha}$. Alors $\lambda=\varphi(1)=f(x,y)$ fournit :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*\ \ \varphi(t)=f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y).$$

3) Si f de classe $\mathcal{C}^1$, homogène de degré α, est solution, on obtient :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \ \alpha f(tx,ty)=t^2\sqrt{x^4+2y^4}$$

d'où :
$$t^{\alpha}\sqrt{x^4+2y^4}=t^2\sqrt{x^4+2y^4}.$$

Il en résulte $\alpha=2$ et $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^4+2y^4}$.

C'est la seule solution possible et on vérifie qu'elle convient effectivement.

CHAPITRE

10 Courbes et surfaces

✎(1) Étude affine et étude métrique.

En première année (Analyse PCSI/MPSI), nous avons étudié les arcs paramétrés de $\mathbb{R}^2$. ✎(1)
On se borne (section B) à une brève extension de ces notions aux arcs paramétrés de $\mathbb{R}^3$.
Dans ce chapitre, E désigne soit le plan $\mathbb{R}^2$ soit l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère cartésien canonique $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Lorsque E est euclidien orienté, ce repère est orthonormal direct.

A. Courbes d'équation $F(x,y) = 0$

Soit F une fonction de classe C^k, avec $k \in \mathbb{N}^*$ ou $k = +\infty$, sur un ouvert U de $E = \mathbb{R}^2$.
L'objet de cette section est de préciser l'ensemble Γ des points (x, y) de U pour lesquels $F(x, y) = 0$.

Théorème 1

Soit $M = (a, b)$ un point de Γ (donc $F(a, b) = 0$) tel que $\operatorname{grad} F(a, b) \neq 0$.

Si on a $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$, ✎(2) alors il existe des intervalles ouverts I et J, contenant respectivement a et b, tels que $I \times J \subset U$, et satisfaisant à la condition suivante :

il existe une fonction φ de classe C^k sur I, à valeurs dans J, et une seule, telle que pour tout $(x, y) \in I \times J$, $F(x, y) = 0$ équivaut à $y = \varphi(x)$. ✎(3)

✎(2) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b) \neq 0$ se traite par échange de x et y.

✎(3) Ce théorème est admis.

Définition 1

Un point $M = (a, b)$ de Γ est dit **régulier** si $\operatorname{grad} F(a, b) \neq 0$, il est dit **stationnaire** sinon.

Remarque

Dans le cas où $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a, b) \neq 0$, $F(x, y) = 0$ équivaut, localement, à $x = \psi(y)$, avec ψ fonction réelle d'une variable réelle. ✎(4)

✎(4) Ainsi, autour de chacun de ses points réguliers, Γ coïncide avec une courbe d'équation $y=\varphi(x)$ ou $x=\psi(y)$. On dit que Γ est la **courbe d'équation** $F(x,y)=0$.

Propriété 1

Avec les hypothèses du théorème 1, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$.

☞ La fonction réelle $x \mapsto F\big(x, \varphi(x)\big)$ est constante sur I, sa dérivée est donc nulle.

Par composition des dérivations, il vient $\forall x \in I,\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\big(x, \varphi(x)\big) + \varphi'(x)\dfrac{\partial F}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big) = 0.$

On conclut avec $\dfrac{\partial F}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big) \neq 0$. ✎(5)

✎(5) $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ est continue sur U et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.
Les intervalles I et J sont choisis tels que : $\forall (x,y) \in I \times J,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$.

Propriété 2

En tout point régulier (x_0, y_0) de la courbe Γ :

- le vecteur $\left(-\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0), \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$ dirige la tangente,
- le vecteur $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = \operatorname{grad} F(x_0, y_0)$ dirige la normale.

Exemple 1 Tangentes à l'ellipse $\mathscr{E}$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Soit $F : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$. $F \in C^\infty\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\big)$.

En tout point $\big(x_0, y_0\big)$ de $\mathscr{E}$ on a $\operatorname{grad} F\big(x_0, y_0\big) = \left(\dfrac{2x_0}{a^2}, \dfrac{2y_0}{b^2}\right) \neq (0, 0)$.

Donc tous les points de $\mathscr{E}$ sont réguliers et la tangente en $\big(x_0, y_0\big)$ de $\mathscr{E}$ a pour équation :

$$\big(x - x_0\big)\frac{x_0}{a^2} + \big(y - y_0\big)\frac{y_0}{b^2} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1 \ ✎(6)$$

✎(6) en tenant compte de $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$.

B. Courbes paramétrées

(7) Les définitions de ce paragraphe sont valables indifféremment pour les arcs de $E=\mathbb{R}^2$ ou $E=\mathbb{R}^3$

1. Courbe paramétrée de E (7)

1.1 – Définitions. Interprétation cinématique

Définition 2

On appelle **arc paramétré** ou **courbe paramétrée** de E, un couple (I, Φ) formé d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une application Φ de I dans E de classe C^1 sur I.

L'image $\Phi(I)$ de Φ est le **support de l'arc** paramétré (I, f).

Lorsque Φ est de classe C^k ou C^∞, l'arc paramétré est dit de classe C^k ou C^∞.

- Usuellement, un arc paramétré (I, Φ) de support $\Gamma = \Phi(I)$ est noté Γ.

Interprétation cinématique

Si le paramètre t désigne le temps, alors $\Phi(t)$ est la position d'un mobile ponctuel M à l'instant t ; le support de l'arc s'appelle la **trajectoire** et les deux premiers vecteurs dérivés

$$\Phi'(t) = \frac{dM}{dt} \text{ la \textbf{vitesse},} \quad \Phi''(t) = \frac{d^2M}{dt^2} \text{ l'\textbf{accélération}.}$$

Ceci explique la notation $M(t) = \Phi(t)$, on note aussi M', M'' pour les dérivées de M.

Exemple 2 L'arc Γ : $t \mapsto M = O + \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}\vec{i} + \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}\vec{j} + \operatorname{th} t\,\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$, est la trajectoire d'un mobile $M(t)$ qui se déplace sur la sphère $S(O, 1)$.

Avec $\vec{u} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$, $\vec{u'} = \frac{d\vec{u}}{dt} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}\vec{u} + \operatorname{th} t\,\vec{k} \quad \text{donc} \quad \|\overrightarrow{OM}\|^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} + \operatorname{th}^2 t = 1.$$

$$M' = \frac{dM}{dt} = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{u} + \frac{1}{\operatorname{ch} t}\vec{u'} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{k}.$$

$$M'' = \frac{d^2M}{dt^2} = -\frac{2}{\operatorname{ch}^3 t}\vec{u} - \frac{2\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{u'} - \frac{2\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^3 t}\vec{k}.$$

1.2 – Changement de paramètre admissible

Soit $\Gamma = (I, \Phi)$ un arc paramétré de classe C^k, $k \geq 1$, et J un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que θ : $J \to I$ est un **changement de paramètre admissible** sur Γ si c'est un C^k-difféomorphisme de J sur I. (8)

(8) **Rappel** : pour que θ soit un C^k-difféomorphisme de J sur I, il faut et il suffit que θ soit une application surjective de J sur I, ($\theta(J)=I$), de classe C^k sur J, et telle que θ' ne s'annule pas sur J.

Avec $\Psi = \Phi \circ \theta$, (J, Ψ) a le même support que (I, Φ) : $\Phi(I) = \Psi(J) = \Gamma$; on dit aussi que (J, Ψ) est un autre **paramétrage admissible** de Γ.

1.3 – Point simple – Point multiple – Arc simple

Les définitions sont les mêmes que pour un arc plan.

Ces notions sont invariantes par changement de paramètre admissible.

2. Étude locale d'un arc – Tangente

Le cas des arcs plans est connu, on suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$.

Soit $\Gamma = (I, \Phi)$ un arc paramétré de classe C^k, ($k \in \mathbb{N}^*$ aussi grand que nécessaire).

2.1 – Entiers caractéristiques

- S'il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Phi^{(\ell)}(t_0) \neq 0$, on note p le plus petit de ces entiers non nuls.
- On suppose ensuite qu'il existe un entier j : $1 \leqslant p < j \leqslant k$, tel que $\left(\Phi^{(p)}(t_0), \Phi^{(j)}(t_0)\right)$ soit une famille libre de E et on note q le plus petit de ces entiers.
- Enfin, on suppose qu'il existe un entier ℓ : $1 \leqslant p < q < \ell \leqslant k$ tel que :

$$\left(\Phi^{(p)}(t_0), \Phi^{(q)}(t_0), \Phi^{(\ell)}(t_0)\right)$$

soit une base de E et on note r le plus petit de ces entiers.

- p, q et r sont les **entiers caractéristiques** du point $M_0 = \Phi(t_0)$ de l'arc Γ.

Ceux-ci, ainsi que la droite vectorielle $\mathbb{R}\,\Phi^{(p)}(t_0)$ et le plan vectoriel $\mathbb{R}\,\Phi^{(p)}(t_0) \oplus \mathbb{R}\,\Phi^{(q)}(t_0)$, sont invariants par changement de paramètre admissible.

✎ (9) Conservons les notations précédentes.

2.2 – Tangente – Plan osculateur ✎ (9)

Définition 3

La **tangente** à l'arc Γ au point $M_0 = \Phi(t_0)$ est la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\Phi^{(p)}(t_0)$.

La tangente ne dépend pas du paramétrage admissible choisi.

Définition 4

- Le point $M_0 = \Phi(t_0)$ est un **point régulier** de Γ si $\Phi'(t_0)$ est non nul.

Il est dit **stationnaire** si $\Phi'(t_0) = 0$.

- Γ est un **arc régulier** si tous ses points sont réguliers.

La tangente à Γ en un point M est alors la droite $M + \mathbb{R}\overrightarrow{M'}$.

✎ (10) Cette notion ne figure pas au programme. Elle est introduite à titre de complément.
Le plan osculateur ne dépend pas du paramétrage admissible choisi.

Définition 5

Le **plan osculateur** ✎ (10) à l'arc Γ au point $M_0 = \Phi(t_0)$ est le plan passant par M_0 et dirigé par $\Phi^{(p)}(t_0)$ et $\Phi^{(q)}(t_0)$.

✎ (11) Le plan osculateur en un point M est alors le plan $M + \mathbb{R}\overrightarrow{M'} + \mathbb{R}\overrightarrow{M''}$.

Définition 6

- $M_0 = \Phi(t_0)$ est dit **birégulier** si $\left(\Phi'(t_0), \Phi''(t_0)\right)$ est une famille libre.
- Γ est un arc birégulier si tous ses points sont biréguliers. ✎ (11)

3. Longueur – Abscisse curviligne

3.1 – Longueur d'un arc

Définition 7

Soit Γ un arc de E paramétré par $\Phi\ :\ [a, b] \to E,\ \ t \mapsto M = \Phi(t)$.

Si l'ensemble des longueurs L_σ des lignes polygonales inscrites dans Γ où σ décrit les subdivisions de $[a, b]$, admet une borne supérieure $L = \sup L_\sigma$, on dit que l'arc Γ est **rectifiable** ✎ (12) et le réel L est appelé **longueur** de Γ.

✎ (12) Cette notion et le théorème 2 suivant sont non exigibles, elles sont données en introduction à l'abscisse curviligne.

Théorème 2

Une courbe Γ paramétrée par Φ de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ est rectifiable, et sa longueur est $\quad L(\Gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\,\Phi'(t)\,\|\,\mathrm{d}t$.

3.2 – Abscisse curviligne d'un arc paramétré

Définition 8

Soit Γ un arc paramétré par une fonction Φ de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Au réel $t_0 \in I$ correspond la fonction $s : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \int_{t_0}^{t} \| \Phi'(u) \| \mathrm{d}u$ appelée

abscisse curviligne d'origine $M_0 = \Phi(t_0)$

sur l'arc Γ orienté «dans le sens des t croissants».

Remarque

Suivant l'usage, notons $M(t)$ au lieu de $\Phi(t)$.

Le réel $s(t)$ est l'abscisse curviligne du point $M(t)$.

Elle est positive si $t > t_0$, négative si $t < t_0$, et $|s(t)|$ est la longueur de l'arc $M_0M(t)$.

La fonction s est de classe C^1 avec $s'(t) = \| \Phi'(t) \|$.

Exemple 3 Considérons de nouveau l'arc $\Gamma : t \mapsto M = O + \dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t}\vec{i} + \dfrac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\vec{j} + \operatorname{th} t\,\vec{k}$.

On a trouvé $M'(t) = -\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{u} + \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\vec{u'} + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{k}$

donc $\|M'(t)\| = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t}$.

En choisissant $t_0 = 0$, on obtient :

$$s(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} u}\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}\operatorname{Arctan} e^t - \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Théorème 3

Une abscisse curviligne d'un arc paramétré régulier définit un nouveau paramétrage admissible de classe C^1.

Définition 9

Un paramétrage $\Psi : J \to E, \sigma \mapsto M = \Psi(\sigma)$ de l'arc Γ est dit **normal** lorsque :

$$\forall \sigma \in J, \ \| \Psi'(\sigma) \| = 1.$$

On dit aussi que σ est un paramètre normal.

Une abscisse curviligne est un paramètre normal.

3.3 – Vecteur unitaire tangent (13)

(13) **Remarques :**

- si Γ est un arc de classe C^k, $k \geq 2$, $\vec{T}$ est de classe C^{k-1} et, en tout point, les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{T'}$ sont orthogonaux ;
- si s est un paramètre normal : $\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}$.

Définition 10

Soit Γ un arc régulier paramétré par $\Phi : I \to E, t \mapsto M = \Phi(t)$.

Le vecteur unitaire $\vec{T}(t) = \dfrac{\Phi'(t)}{\| \Phi'(t) \|}$ est appelé le **vecteur unitaire tangent** au point $M(t)$.

Il dirige la tangente orientée $M(t) + \mathbb{R}\,\Phi'(t)$.

C. Surfaces et nappes paramétrées

1. Notions de surface et de nappe paramétrée

1.1 – Définition

L'espace E (éventuellement euclidien orienté) est muni d'un repère (orthonormal direct) $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Définition 11

Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.

On appelle **surface d'équation cartésienne** $f(x, y, z) = 0$ ou $f(M) = 0$, la partie $\mathcal{S}$ de E :

$$\mathcal{S} = \{M = O + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \,/ f(x, y, z) = 0\}.$$

Définition 12

Une **nappe paramétrée** est une application F de $\mathbb{R}^2$ dans E, de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$.

Son support Σ est l'image de F appelée surface paramétrée :

$$D \subset \mathbb{R}^2 \to E, \quad (u, v) \mapsto M = F(u, v) = O + x(u, v)\overrightarrow{i} + y(u, v)\overrightarrow{j} + z(u, v)\overrightarrow{k}.$$

Définition 13

Une nappe paramétrée est dite **cartésienne** lorsqu'il existe un repère de E dans lequel Σ est définie par :

$$D \to E, (x, y) \mapsto M = O + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + h(x, y)\overrightarrow{k}, \quad \text{avec } h \in C^1(D, \mathbb{R}).$$

Σ est aussi la surface d'équation cartésienne $z = h(x, y)$.

Définition 14

$M_0 = O + x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j} + z_0\overrightarrow{k}$ est un **point singulier** de la surface $\mathcal{S}$: $f(x, y, z) = 0$ si :

$$f(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 0 \text{ [14]}$$

[14] Donc aussi, si $f(M_0)=0$ et $\operatorname{grad} f(M_0)=0$.

Définition 15

On dit que $M_0 = F(u_0, v_0)$ est un **point stationnaire** de la nappe paramétrée $\Sigma : D \to E, (u, v) \mapsto F(u, v)$ si les vecteurs $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont liés.

Dans le cas contraire, M_0 est un **point régulier**.

Si la famille $\left(\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial y}, \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}\right)$ reste libre sur D, on dit que la **nappe est régulière**.

Remarques

- Certaines surfaces usuelles ne rentrent pas dans ce cadre (penser à des polyèdres, des cubes ou un tétraèdre par exemple).
- Il arrive qu'une surface soit donnée en coordonnées cylindriques.

  Par exemple $\mathcal{S}$: $z = a\cos 2\theta$ pour le conoïde de Plücker.

$$\mathbb{R}^2 \to E, (r, \theta) \mapsto F = O + r\overrightarrow{u}(\theta) + a\cos 2\theta\,\overrightarrow{k}.$$

Exemple 5 Soit $\mathscr{C}$ l'intersection des deux surfaces $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ d'équations :

$$\mathscr{S}_1 \ : x^2 + y^2 - 2z = 0 \ \text{ et } \ \mathscr{S}_2 \ : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0.$$

Déterminer la tangente à $\mathscr{C}$ au point O.

$\mathscr{S}_1$ est un paraboloïde de révolution, $\mathscr{S}_2$ est une sphère.

Écrivons la matrice des demi-dérivées partielles :

$$\text{en } (x, y, z) : \begin{pmatrix} x & y & -1 \\ x-1 & y & z \end{pmatrix} \quad \text{puis en } O : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seul y est un paramètre admissible de la courbe $\mathscr{C}$.

Il existe un intervalle ouvert I et deux fonctions de la classe C^∞ de I dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$I \to E, y \mapsto M = O + x(y)\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z(y)\overrightarrow{k}$$

soit un paramétrage de $\mathscr{C}$.

Par dérivation, les équations de $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, donnent :

$$\forall y \in I \ : \ \begin{cases} xx' + y - z' = 0 \\ (x-1)x' + y + zz' = 0 \end{cases}$$

ce qui fournit le vecteur dérivé en O : $\overrightarrow{M'}(0) = \overrightarrow{j}$.

La tangente à $\mathscr{C}$ en O est le support de l'axe $(O, \overrightarrow{j})$.

2.3 – Courbe tracée sur une surface ou sur une nappe

- Le point de vue concret est : le support de la courbe est inclus dans la surface ou dans le support de la nappe.

- La courbe paramétrée $\mathscr{C} : I \to E, t \mapsto M = O + x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ est tracée sur la surface $\mathscr{S} : f(x, y, z) = 0$, si, pour tout $t \in I$, on a $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$.

Dérivons cette fonction nulle : $x' f'_x + y' f'_y + z' f'_z = 0$ en $M(t)$ sur I

ou $\overrightarrow{M'(t)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M(t)) = 0$ dans le cas d'un espace eulidien.

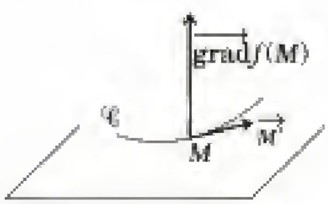
En un point régulier de la courbe, la tangente est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(M(t))$.

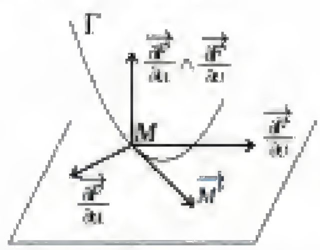
- Sur une nappe paramétrée $F : D \to E, (u, v) \mapsto F(u, v)$, on construit une courbe paramétrée à l'aide de $\varphi : I \to D, t \mapsto \big(u(t), v(t)\big)$ par $\Gamma : I \to E, t \mapsto M = F\big(u(t), v(t)\big)$.

Γ est de classe C^1 et le calcul donne :

$$\text{pour tout } t \in I, \ \overrightarrow{M'} = u' \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial u} + v' \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial v} \text{ en } \big(u(t), v(t)\big)$$

Dans le cas d'un espace euclidien orienté, $\overrightarrow{M'}$ est orthogonal à $\dfrac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial v}$





- En particulier, les applications partielles de F sont des courbes tracées sur le support de la nappe. On parle dans ce cas de courbes ou **lignes coordonnées** ;

les deux familles sont $\mathscr{C}_u : v \mapsto F(u, v)$ (u réel fixé) et $\Gamma_v : u \mapsto F(u, v)$ (v réel fixé)

Ces lignes coordonnées permettent d'imaginer le support de la nappe. Un logiciel de surfaces trace les lignes coordonnées et masque les parties cachées pour visualiser la surface à l'écran.

- Par exemple, les lignes coordonnées du cône paramétré $(r, \theta) \mapsto O + r(\overrightarrow{u}(\theta) + \overrightarrow{k})$ sont les cercles $\mathscr{C}_r : z = r, x^2 + y^2 = r^2$ et les génératrices $\Gamma_\theta = O + \mathbb{R}(\overrightarrow{u}(\theta) + \overrightarrow{k})$.

Pour la nappe $x = \cos u, y = \cos v, z = \cos(u + v)$, les lignes coordonnées sont des ellipses.

3. Surfaces et nappes réglées

3.1 – Définitions

Définition 18

$\mathcal{S}$ est une **surface réglée** si elle est réunion de droites.

Ces droites s'appellent les **génératrices** de la surface.

Une courbe qui coupe toutes les génératrices d'une surface réglée s'appelle une **courbe directrice**

Définition 19

Une **surface cylindrique** ou cylindre est engendrée par des droites parallèles.

Définition 20

Une **surface conique** ou cône est engendrée par des droites concourantes en un point A appelé **sommet du cône**.

Définition 21

Étant donné une surface $\mathcal{S}$ et un vecteur non nul $\overrightarrow{K}$, on appelle :

- **cylindre de direction** $\mathbb{R}\overrightarrow{K}$ **circonscrit à** $\mathcal{S}$, la réunion des tangentes à $\mathcal{S}$ dirigées par $\overrightarrow{K}$,
- **contour apparent de** $\mathcal{S}$ **de direction** $\mathbb{R}\overrightarrow{K}$, l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ où la direction du plan tangent contient $\overrightarrow{K}$.

Définition 22

Étant donné une surface $\mathcal{S}$ et un point A de l'espace, on appelle :

- **cône de sommet** A **circonscrit à** $\mathcal{S}$, la réunion des droites issues de A et tangentes à $\mathcal{S}$,
- **contour apparent de** $\mathcal{S}$ **vu du point** A, l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ où le plan tangent contient A.

3.2 – Paramétrage des surfaces réglées, des cylindres et des cônes

On donne une courbe directrice $\mathcal{C}$ paramétrée et une fonction vectorielle $\overrightarrow{K}$ de classe C^1 sur un intervalle I : $\mathcal{C}$: $I \to E, t \mapsto A(t)$, $I \to E \setminus \{0\}, t \mapsto \overrightarrow{K}(t)$

Pour un cylindre, $\overrightarrow{K}$ est constant, et pour un cône, le sommet A est fixe.

- **Surface réglée de directrice** $\mathcal{C}$

$\Sigma : I \times \mathbb{R} \to E, (t, \lambda) \mapsto M = A(t) + \lambda\overrightarrow{K}(t) : M = F(t, \lambda)$

Les lignes coordonnées $\lambda \mapsto F(t_0, \lambda)$ sont les génératrices rectilignes.

Les lignes coordonnées $t \mapsto F(t, \lambda_0)$ sont des courbes directrices.

On a $\dfrac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial t} = \overrightarrow{A'} + \lambda\overrightarrow{K'}$ et $\dfrac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial \lambda} = \overrightarrow{K}$.

En un point régulier $M = F(t, \lambda)$ le plan tangent contient la génératrice $\mathcal{D}_t = M + \mathbb{R}\overrightarrow{K}(t)$.

En général, lorsque M glisse le long de cette génératrice $\mathcal{D}_t$, le plan tangent pivote autour de $\mathcal{D}_t$.

Si, au contraire, pour toute génératrice de Σ, le plan tangent reste fixe le long de celle-ci, on dit que Σ est une **surface développable**.

Complément

Si, pour tout $t \in I$, la famille $(\overrightarrow{A'}, \overrightarrow{K}, \overrightarrow{K'})$ est liée, Σ est une surface développable.

La surface réglée formée des tangentes à une courbe est développable.

Théorème 9

Équation d'une surface de révolution

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $A(a, b, c)$ un point et $\overrightarrow{K} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k}$ un vecteur non nul. Pour tout $M(x, y, z)$, notons :

$\mathcal{S} = AM^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ et $P = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{K} = \alpha x + \beta y + \gamma z$.

Alors l'ensemble d'équation $f(\mathcal{S}, P) = 0$ est une surface de révolution d'axe $A + \mathbb{R}\overrightarrow{K}$.

☞ Si M_0 est sur cette surface $f(\mathcal{S}_0, P_0) = 0$, le cercle $\Gamma_0(\mathcal{S} = \mathcal{S}_0, P = P_0)$ d'axe $A + \mathbb{R}\overrightarrow{K}$ passant par M_0 est aussi inclus dans la surface.

Théorème 10

$f(x^2 + y^2, z) = 0$ est l'équation d'une **surface de révolution d'axe** Oz.

☞ Ici le cercle Γ_0 est une section droite $(z = z_0)$ du cylindre de révolution d'axe Oz :

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

5.4 – Former l'équation d'une surface de révolution

- **Cas où la courbe directrice est paramétrée**

$$\mathcal{C} : t \mapsto M = O + x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$$

On obtient l'équation cartésienne d'une surface de révolution d'axe $\Delta = A + \mathbb{R}\overrightarrow{K}$ contenant $\mathcal{C}$ en éliminant t entre les deux équations du cercle

$$\Gamma_t \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \big(x(t)-a\big)^2 + \big(y(t)-b\big)^2 + \big(z(t)-c\big)^2 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma z(t) \end{cases}$$

Dans le cas particulier de l'axe Oz, éliminer t entre ces deux équations :

$$\Gamma_t : x^2 + y^2 = x^2(t) + y^2(t) \quad , \quad z = z(t)$$

- **Cas où la courbe directrice est intersection de deux surfaces**

$\mathcal{C} : g(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad , \quad h(x_0, y_0, z_0) = 0$

$$\Gamma_0 \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 \end{cases}$$

Éliminer x_0, y_0, z_0 entre ces quatre relations.

5.5 – Méthode pour dessiner une méridienne

- Σ surface de révolution d'axe Oz : $f(x^2 + y^2, z) = 0$ (resp. $g(r, z) = 0$).

Une méridienne est $\mathcal{C}$: $y = 0, f(x^2, z) = 0$ (resp. $y = 0, g(x, z) = 0$)

- Σ surface de révolution d'axe $(O, \overrightarrow{K})$: $f(x^2 + y^2 + z^2, \alpha x + \beta y + \gamma z) = 0$.

Pour revenir au cas précédent, considérer le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ où :

$$\overrightarrow{K} = \frac{\alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \quad , \quad Z = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{K} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

$$OM^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Il est inutile d'expliciter les vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ ni les coordonnées X et Y.

- Dans le cas particulier d'une fonction symétrique $f(x^2 + y^2 + z^2, x + y + z) = 0$, l'axe est $\Delta(x = y = z)$ dirigé par $\sqrt{3}\,\overrightarrow{K} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et $x + y + z = Z\sqrt{3}$.

Penser à utiliser l'identité :

$$2(yz + zx + xy) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2Z^2 - X^2 - Y^2$$

Exemple : $yz + zx + xy = 0$ est un cône de révolution.

Exemple 14 Soit $\mathscr{C}$ la lemniscate $x = a,\ (y^2 + z^2)^2 - 8a^2(y^2 - z^2) = 0$.

Reconnaître la surface qu'elle engendre en tournant autour de Oz.

Le cercle d'axe Oz passant par $M(x, y, z) \in \mathscr{C}$ est $\Gamma_M : X^2 + Y^2 = x^2 + y^2,\ Z = z$

Il suffit d'éliminer y et z entre les équations de $\mathscr{C}$ et de Γ_M :

$$\Sigma : (X^2 + Y^2 + Z^2 - a^2)^2 - 8a^2(X^2 + Y^2 - Z^2 - a^2) = 0$$

Pour reconnaître Σ, cherchons une méridienne dans le plan $X = 0$:

$\Sigma \cap (X = 0) : (Y^2 + Z^2)^2 - 10a^2Y^2 + 6a^2Z^2 + 9a^4 = 0$

ou $(Y^2 + Z^2 + 3a^2)^2 - 16a^2Y^2 = 0$

$(Y^2 + Z^2 - 4aY + 3a^2)(Y^2 + Z^2 + 4aY + 3a^2) = 0$

Il s'agit de la réunion de deux cercles Γ et Γ' symétriques par rapport à Oz.

La surface Σ est le tore d'axe Oz engendré par Γ, cercle de rayon a, dont le centre est à la distance $2a$ de l'axe.

Il est intéressant de faire la réciproque !

Exercices

L'espace E : $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un répère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Ex. 1

On donne la courbe (Γ) d'équation :

$$y^2 + xy(1-\sqrt{3}) - x^2\sqrt{3} + x - y = 0.$$

1) Trouver la tangente et le rayon de courbure en O.
2) Reconnaître et construire (Γ).

Ex. 2

Déterminer la surface Σ engendrée par les normales à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = xy$ aux points situés sur l'axe $(O, \vec{i})$.

Ex. 3

Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z^3 = xy$ qui contiennent la droite :

$$\mathcal{D} \ : \ x = 2\ ,\ y = 3z - 3.$$

Ex. 4

Soit Γ la courbe définie par :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + 3xy - 2y = 0 \end{cases}$$

Trouver la tangente au point $A(1, -1, 1)$.

Ex. 5

Soit a, c, λ trois nombres réels vérifiant : $0 < c < \lambda < a$ et les surfaces : $\mathcal{S}_1 \ : \ y^2(x^2+z^2) - c^2x^2 - a^2z^2 = 0$,

$$\mathcal{S}_2 \ : \ \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

1) Étudier $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.
2) Montrer qu'en chacun de leurs points communs les plans tangents à $\mathcal{S}_1$ et à $\mathcal{S}_2$ sont perpendiculaires.

Ex. 6

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 1 = 0.$$

1) Quelle est la projection de $\mathcal{S}$ sur le plan xOy ?
2) Quels sont les points singuliers de $\mathcal{S}$?
3) Quelle est la nature de la section de $\mathcal{S}$ par le plan $P_h \ : z = h$?
4) Quelle sont les droites tracées sur $\mathcal{S}$?

Ex. 7

Trouver une nappe de classe $\mathcal{C}^1$ régulière Σ paramétrée par : $\quad \Phi \ : \ D \to E,\ (u,v) \mapsto M(u,v)$

(D ouvert de $\mathbb{R}^2$) et telle que $\forall (u,v) \in D$, le plan tangent en $M(u,v)$ ait pour équation :

$$u^2x + v^2y + (1-u-v)^2z = 1.$$

Indications

Ex. 1

Γ est une hyperbole : préciser son centre

et ses asymptotes.

Ex. 2

Un point $P(x,y,z)$ appartient à Σ si et seulement si il existe un point M de $(O, \vec{i})$ et un réel λ tel que $P = M + \lambda\vec{n}$ (où $\vec{n}$ est vecteur normal en M à $\mathcal{S}$).

Ex. 3

$\mathcal{S}$ contient un seul point singulier.

Ex. 4

Utiliser le théorème 5.

Ex. 5

Dans le système définissant $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, x et z jouent des rôles symétriques.

Ex. 6

1) $m(x, y, 0)$ appartient à la projection de $\mathcal{S}$ sur xOy si et seulement si l'équation du second degré en z : $z^2 - 2xyz + x^2 + y^2 - 1 = 0$ a des solutions.

4) La droite $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{V}$ est incluse dans $\mathcal{S}$ si et seulement si : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(A + t\vec{V}) = 0$

Ex. 7

Si Σ est une solution du problème, en posant $\Phi = (f, g, h)$, former un système de trois identités vérifiées par f, g, h et leurs dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v}$$

Solutions des exercices

Ex. 1

1) L'équation s'écrit $f(x,y)=0$ avec $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto y^2+xy(1-\sqrt{3})-x^2\sqrt{3}+x-y$.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0,0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$ donc, Γ coïncide autour de O avec une courbe γ admettant une représentation de la forme $y=g(x)$, $x\in I$ avec $g\in C^\infty(I,\mathbb{R})$ et $g'(x)=-\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))}$.

Compte tenu de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2x\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})y+1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(1-\sqrt{3})x+2y-1$ et $g(0,0)=0$, il vient $g'(0)=1$: Γ est tangente en O à la droite d'équation $y=x$.

Soit s une abscisse curviligne sur γ orientée dans le sens des x croissants. On a $s'(x)=\sqrt{1+g'(x)^2}$ donc $s'(0)=\sqrt{2}$.

D'autre part si φ est un paramètre angulaire : $\forall x\in I$, $\left(\vec{i},\vec{T}(x)\right)=\varphi(x)$, on obtient avec les formules de Frenet (voir l'ouvrage de première année) que le rayon de courbure en 0 est $R(0)=\dfrac{s'(0)}{\varphi'(0)}$.

De $\tan\varphi(x)=g'(x)$, on déduit $\left(1+\tan^2\varphi(x)\right)\varphi'(x)=g''(x)$ donc en 0 : $2\varphi'(0)=g''(0)$.

Pour calculer $g''(0)$, on peut partir de l'identité $\forall x\in I$, $g^2(x)+xg(x)(1-\sqrt{3})-x^2\sqrt{3}+x-g(x)=0$, dériver deux fois et substituer à x la valeur 0.

Envisageons plutôt une autre méthode permettant le calcul simultané de $a=g'(0)$ et $b=g''(0)$ en évitant celui des deux fonctions dérivées correspondantes.

Puisque g est de classe C^∞, elle admet un développement limité en 0 à tout ordre. En particulier à l'ordre 2 :

$$g(x)=ax+b\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

On en déduit $f\left(x,g(x)\right)=(1-a)x+\left(a^2+a(1-\sqrt{3})-\sqrt{3}-\frac{b}{2}\right)x^2+o(x^2)$ et, puisque $f\left(x,g(x)\right)$ est identiquement nulle sur I, il vient $a=1$ puis $b=4(1-\sqrt{3})$.

En conséquence, on a $\varphi'(0)=2(1-\sqrt{3})$ et $R(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{3})}$.

2) Posons $q(x,y)=-x^2\sqrt{3}+xy(1-\sqrt{3})+y^2$: c'est la partie quadratique de l'équation de Γ.

La matrice de q est $A=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}$.

Puisque $\det A<0$, les deux valeurs propres de A sont de signes contraires et Γ est une hyperbole. (cf. Algèbre–Géométrie chapitre 7). Dans ce cas, on sait que $q(x,y)$ se factorise, et en effet on vérifie ici que :

$$q(x,y)=(y+x)(y-x\sqrt{3}),$$

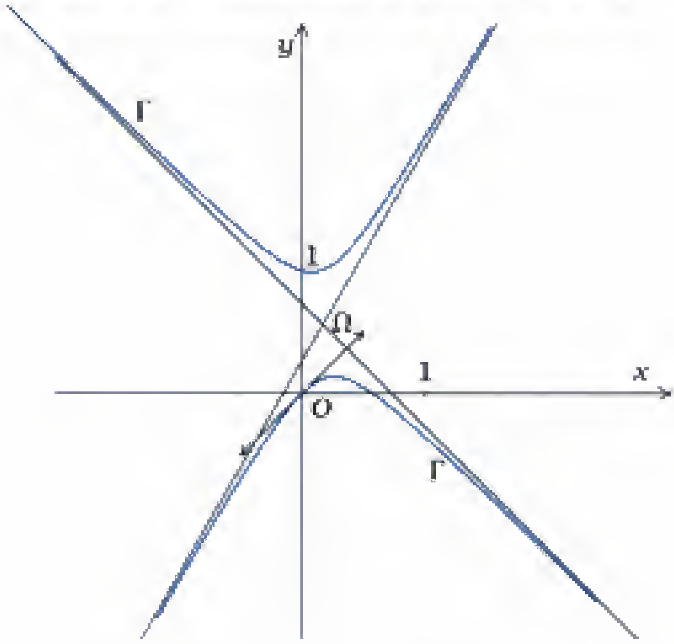
de plus les asymptotes ont pour directions les droites vectorielles d'équations $y+x=0$ et $y-x\sqrt{3}=0$.

Les coordonnées α et β du centre Ω sont déterminées par $\mathrm{grad}\,f(\alpha,\beta)=0$ ce qui donne :

$$\begin{cases}-2\alpha\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})\beta=-1\\ (1-\sqrt{3})\alpha+2\beta=1\end{cases}$$

et on trouve $\alpha = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} \simeq 0,17$, $\beta = \dfrac{3\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{3}} \simeq 0,56$.

Les asymptotes sont alors complètement déterminées et on peut effectuer le tracé.



Ex. 2

$\mathcal{S}$ est paramétrée par $(x,y) \mapsto M = O + x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$, et contient $(O,\vec{i})$.

On obtient $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \vec{i} + y\,\vec{k}$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \vec{j} + x\,\vec{k}$.

En un point $M(x,0,0)$ situé sur $(O,\vec{i})$, un vecteur normal à $\mathcal{S}$ est donc :

$$\vec{n}(x) = \vec{i} \wedge (\vec{j} + x\,\vec{k}) = -x\,\vec{j} + \vec{k}$$

$P(x,y,z)$ appartient à Σ si et seulement si il existe $(t,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = M(t,0,0) + \lambda\,\vec{n}(t)$ c'est-à-dire :

$$x = t \ , \ y = -\lambda t \ , \ z = \lambda.$$

Donc $P(x,y,z)$ appartient à Σ si et seulement si $y + zx = 0$.

On reconnait un paraboloïde hyperbolique.

Ex. 3

Posons $f(x,y,z) = xy - z^3$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

On a alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -3z^2$.

Le point O est donc le seul point singulier sur $\mathcal{S}$.

En $M(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{S} \setminus \{O\}$, le plan tangent a pour équation :

$$xy_0 + yx_0 - 3zz_0^2 + z_0^3 = 0.$$

Ce plan contient la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ 2y_0 + (3z-3)x_0 - 3zz_0^2 + z_0^3 = 0.$$

Un point $M(x_0,y_0,z_0)$ convient donc si et seulement si :

$$\begin{cases} 3x_0 - 2y_0 - z_0^3 = 0 & (1) \\ 3x_0 - 3z_0^2 = 0 & (2) \\ x_0 y_0 - z_0^3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$$

$x_0 = 0$ donne $y_0 = z_0 = 0$, ce cas est à rejeter.

Avec **(2)** et **(3)** on obtient donc $x_0 = z_0^2$, $y_0 = z_0$, puis avec **(1)**, $z_0^2 - 3z_0 + 2 = 0$ c'est-à-dire $z_0 = 1$ ou $z_0 = 2$.

Conclusion

La surface $\mathcal{S}$ a deux plans tangents contenant $\mathcal{D}$, il s'agit de :

$$\begin{array}{lll} P_1 & : & x + y - 3z + 1 = 0 \quad \text{tangent en } M_1(1, 1, 1) \\ \text{et} \quad P_2 & : & x + 2y - 6z + 4 = 0 \quad \text{tangent en } M_2(4, 2, 2) \end{array}$$

Ex. 4

On vérifie que A appartient à Γ.

Posons $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ et $g(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y$: f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$.

Au point A la matrice des dérivées partielles : $\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x + 3y & 3x - 2 & 0 \end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Elle est de rang 2 car la matrice extraite $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Avec le théorème **5** ceci prouve qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 1 et deux fonctions réelles φ et ψ de classe C^1 (au moins) sur I telles que Γ coïncide autour de A avec l'arc γ paramétré par :

$$I \to E, \ x \mapsto M(x) = O + x\overrightarrow{i} + \varphi(x)\overrightarrow{j} + \psi(x)\overrightarrow{k}.$$

Il s'agit ici de calculer le vecteur $\overrightarrow{M}'(1)$.

Les identités :

$$\forall x \in I, \ \begin{cases} x^2 + \varphi(x)^2 + \psi(x)^2 = 3 \\ x^2 + 3x\,\varphi(x) - 2\,\varphi(x) = 0 \end{cases}$$

donnent :

$$\forall x \in I, \ \begin{cases} x + \varphi(x)\,\varphi'(x) + \psi(x)\,\psi'(x) = 0 \\ 2x + 3\,\varphi(x) + (3x - 2)\,\varphi'(x) = 0 \end{cases}$$

d'où en particulier :

$$\begin{cases} -\varphi'(1) + \psi'(1) = -1 \\ \varphi'(1) = 1 \end{cases}$$

D'où finalement $\varphi'(1) = 1$, $\psi'(1) = 0$, $\overrightarrow{M}'(1) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et la tangente à Γ en A est la droite d'équations $x - y = 2$, $z = 1$.

Ex. 5

1) Le système définissant $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ s'écrit :

$$\begin{cases} y^2(x^2 + z^2) = c^2x^2 + a^2z^2 & \textbf{(1)} \\ \dfrac{\lambda^2 - y^2}{\lambda^2} = \dfrac{\lambda^2(x^2 + z^2) - (c^2x^2 + a^2z^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - c^2)} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

il est équivalent à :

$$\begin{cases} y^2(x^2 + z^2) = c^2x^2 + a^2z^2 & \textbf{(1)} \\ \dfrac{\lambda^2 - y^2}{\lambda^2} = \dfrac{(\lambda^2 - y^2)(x^2 + z^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - c^2)} & \textbf{(3)} \end{cases}$$

L'équation **(3)** donne :

$$(\lambda^2 - y^2)\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{x^2 + z^2}{(a^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - c^2)}\right] = 0$$

et puisque $(a^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - c^2) > 0$, on en déduit :

$$y^2 = \lambda^2 \quad \text{soit} \quad y = \varepsilon\lambda \quad (\varepsilon = 1 \text{ ou } -1).$$

Alors (1) devient $\quad (\lambda^2 - c^2)x^2 = z^2(a^2 - \lambda^2)$.

$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ est donc formé de quatre droites : $\mathcal{D}_{ij}$, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$:

$$\mathcal{D}_{ij} \begin{cases} y = \varepsilon_i \lambda & \varepsilon_1 = 1 \text{ ou } \varepsilon_2 = -1 \\ x\sqrt{\lambda^2 - c^2} = \varepsilon'_j z\sqrt{a^2 - \lambda^2} & \varepsilon'_1 = 1 \text{ ou } \varepsilon'_2 = -1 \end{cases}$$

2) Posons :

$$f \ : \ (x, y, z) \mapsto y^2(x^2 + z^2) - c^2x^2 - a^2z^2 \qquad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

$$g \ : \ (x, y, z) \mapsto \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 \qquad g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

En (x, y, z) on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= 2x(y^2 - c^2)\vec{\imath} + 2y(x^2 + z^2)\vec{\jmath} + 2z(y^2 - a^2)\vec{k} \\ \overrightarrow{\text{grad}}\, g &= \frac{2x}{\lambda^2 - a^2}\vec{\imath} + \frac{2y}{\lambda^2}\vec{\jmath} + \frac{2z}{\lambda^2 - c^2}\vec{k} \end{aligned}$$

d'où $\quad \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, g = \dfrac{x^2(y^2 - c^2)}{\lambda^2 - a^2} + \dfrac{y^2(x^2 + z^2)}{\lambda^2} + \dfrac{z^2(y^2 - a^2)}{\lambda^2 - c^2}$.

En un point de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, on a $y^2(x^2 + z^2) = c^2x^2 + a^2z^2$ donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, g &= y^2\left(\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2}\right) - x^2c^2\left(\frac{1}{\lambda^2 - a^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) \\ &\qquad - a^2z^2\left(\frac{1}{\lambda^2 - c^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) \\ &= \left(y^2 - \frac{a^2c^2}{\lambda^2}\right)\left(\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car sur $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, $\quad \dfrac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \dfrac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 - \dfrac{y^2}{\lambda^2} = 0$.

Ex. 6

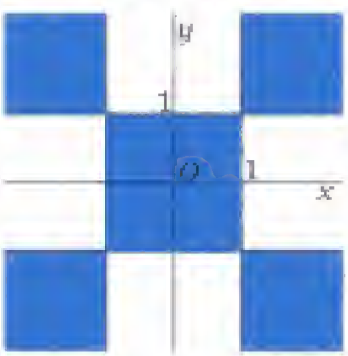
1)

Considérons l'équation de $\mathcal{S}$ comme un polynôme en z de degré 2 :

$$(z - xy)^2 - x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$(z - xy)^2 = (1 - x^2)(1 - y^2).$$

La projection de $\mathcal{S}$ sur xOy est donnée par : $(1 - x^2)(1 - y^2) \geqslant 0$.



2) Notons $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 1 = 0$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Les points singuliers de f sont caractérisés par $f(x,y,z) = 0$, $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y,z) = 0$.

De $\frac{1}{2}f'_x = x - yz$, $\frac{1}{2}f'_y = y - zx$, $\frac{1}{2}f'_z = z - xy$,

on déduit les quatre points singuliers de $\mathcal{S}$:

$$A(1,1,1)\ ,\ B(1,-1,-1)\ ,\ C(-1,1,-1)\ ,\ D(-1,-1,1).$$

3) Notons $\mathcal{C}_h = P_h \cap \mathcal{S}$:

$$x^2 + y^2 - 2hxy + h^2 - 1 = 0, z = h.$$

$\mathcal{C}_h$ est une conique dont les axes sont :

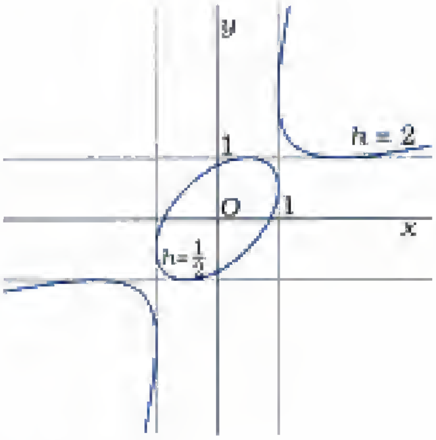
$$(x = y, z = h) \text{ et } (x = -y, z = h).$$

Si $|h| < 1$, $\mathcal{C}_h$ est une ellipse inscrite dans le carré unité.

$\mathcal{C}_0$ est le cercle unité.

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ sont les droites $(x = y, z = 1)$ et $(x = -y, z = -1)$.

Si $|h| > 1$, $\mathcal{C}_h$ est une hyperbole tangente aux côtés du carré.



4) Montrons que toute droite tracée sur $\mathcal{S}$ est parallèle à un plan de coordonnées.

Soit $\overrightarrow{V} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j} + \gamma\,\overrightarrow{k}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{V}$ incluse dans $\mathcal{S}$.

Alors, pour tout réel t, $f(A + t\overrightarrow{V}) = 0$ et le coefficient de t^3 est $-2\,\alpha\,\beta\gamma = 0$, ce qui donne :

$$\alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0 \text{ ou } \gamma = 0.$$

Pour $\alpha = 0$, $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $(O, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$; pour $\beta = 0$, elle est parallèle à $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$; et pour $\gamma = 0$, elle est parallèle à $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

D'après le 3), un plan $P_h : z = h$ coupe $\mathcal{S}$ suivant une droite pour $h = 1$ ou -1.

Par raison de symétrie en (x, y, z), la surface $\mathcal{S}$ contient six droites.

Ex. 7

Supposons que la nappe Σ paramétrée par :

$$\Phi\ :\ D \to E,\ \ (u,v) \mapsto M = O + f(u,v)\overrightarrow{i} + g(u,v)\overrightarrow{j} + h(u,v)\overrightarrow{k}$$

soit solution du problème.

Notons $P(u,v)$ le plan d'équation $u^2x + v^2y + (1-u-v)^2z = 1$ et écrivons que pour tout $(u,v) \in D$, $P(u,v)$ contient $M(u,v)$ et que sa direction contient les vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial M}{\partial v}(u,v)$, on obtient :

$$\forall (u,v) \in D,\quad \begin{cases} u^2 f + v^2 g + (1-u-v)^2 h & = & 1 & (1) \\ u^2 \dfrac{\partial f}{\partial u} + v^2 \dfrac{\partial g}{\partial u} + (1-u-v)^2 \dfrac{\partial h}{\partial u} & = & 0 & (2) \\ u^2 \dfrac{\partial f}{\partial v} + v^2 \dfrac{\partial g}{\partial v} + (1-u-v)^2 \dfrac{\partial h}{\partial v} & = & 0 & (3) \end{cases}$$

(on a noté f au lieu de $f(u,v)$ ...)

En dérivant les deux membres de **(1)** par rapport à u, puis comparant avec **(2)**, il vient :

$$uf - (1-u-v)h = 0 \quad \textbf{(4)}.$$

De même, en dérivant par rapport à v et comparant avec **(3)**, on obtient :

$$vg - (1-u-v)h = 0 \quad \textbf{(5)}.$$

De **(1)**, **(4)** et **(5)**, on déduit :

$$\left[u(1-u-v) + v(1-u-v) + (1-u-v)^2\right] h = 1$$

donc $\forall (u,v) \in D$, $h(u,v) = \dfrac{1}{1-u-v}$ puis $f(u,v) = \dfrac{1}{u}$ et $g(u,v) = \dfrac{1}{v}$.

Les seules nappes éventuellement solution du problème admettent comme paramétrage :

$$\Phi\ :\ D \to E,\ (u,v) \mapsto M = O + \frac{1}{u}\vec{i} + \frac{1}{v}\vec{j} + \frac{1}{1-u-v}\vec{k}$$

où D est un ouvert inclus dans $\mathbb{R}^{*2} \setminus \{(u,v) \mid u+v=1\}$.

Synthèse

Soit Σ une nappe définie comme ci-dessus, on a alors pour tout $(u,v) \in D$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial u} &= -\frac{1}{u^2}\vec{i} + \frac{1}{(1-u-v)^2}\vec{k} \\
\frac{\partial M}{\partial v} &= -\frac{1}{v^2}\vec{j} + \frac{1}{(1-u-v)^2}\vec{k} \\
\text{donc}\quad \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} &= \frac{1}{v^2(1-u-v)^2}\vec{i} + \frac{1}{u^2(1-u-v)^2}\vec{j} + \frac{1}{u^2v^2}\vec{k}
\end{aligned}$$

et le plan tangent $P(u,v)$ en $M(u,v)$ a pour équation :

$$\frac{1}{v^2(1-u-v)^2}\left(x - \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{u^2(1-u-v)^2}\left(y - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{u^2v^2}\left(z - \frac{1}{1-u-v}\right) = 0$$

soit en développant :

$$u^2x + v^2y + (1-u-v)^2z = 1.$$

La nappe Σ est effectivement solution du problème.

CHAPITRE

11 Fonctions de plusieurs variables Calcul intégral

E désigne l'espace $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de base canonique : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Il est aussi muni de sa structure euclidienne canonique.

E^* est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Une base de E^*, qui est de dimension n, est constituée pas les n formes coordonnées relatives à la base $\mathcal{B}$; on la note $\mathcal{B}^*$. On dit que c'est la base **duale** de $\mathcal{B}$. ✎(1)

✎(1) Voir Algèbre géométrie, chapitre 1.

A. Formes différentielles de degré un

U désigne un ouvert de E.

Notation 1

Dans ce chapitre, la base duale de $\mathcal{B}$, est notée $\mathcal{B}^* = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$.

Définition 1

On appelle **forme différentielle** sur U, toute application de U dans E^*. ✎(2)

✎(2) **Remarques**
- Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, sa différentielle $df : U \to E^*$ est une forme différentielle.
- L'espace E^* est un espace vectoriel normé ; on peut donc parler de forme différentielle continue, de forme différentielle de classe C^k.

Notation 2

Une forme différentielle ω sur U est caractérisée par ses n fonctions coordonnées $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ dans la base $\mathcal{B}^*$: $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $P_j : U \to \mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout x de U :

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j(x) dx_j,$$

où $\omega(x)$ est la forme linéaire :

$$\omega(x) \ : \ E \to \mathbb{R}, y \mapsto \omega(x) \cdot y = \sum_{j=1}^{n} y_j P_j(x) \text{ ✎(3)}$$

✎(3) On note $\omega(x) \cdot y$ l'image de y par l'application linéaire $\omega(x)$.

Notation 3

$\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ est l'écriture canonique de ω. ✎(4)

✎(4) On écrit souvent $\omega = Pdx + Qdy$ $(n=2)$ $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ $(n=3)$.

Propriété 1

Classe d'une forme différentielle

La forme différentielle sur U, $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ est de classe C^k, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

si et seulement si les n applications $P_1, P_2, \dots, P_n$: $U \to \mathbb{R}$ sont de classe C^k.

☞ ω est de classe C^k si et seulement si ses composantes sur une base donnée sont de classe C^k.

Notation 4

On note $\Omega^k(U)$ l'ensemble des formes différentielles de classe C^k sur U ;

c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2

Forme différentielle exacte

Une forme différentielle $\omega \in \Omega^k(U)$ est dite exacte sur U s'il existe une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^{k+1} dont la différentielle est ω : $df = \omega$.

Une telle application f est appelée une **primitive** de ω sur U.

Définition 3

Forme différentielle fermée

Une forme différentielle de classe C^k sur U, $(k \geqslant 1)$, $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ est dite fermée si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \quad \text{(sur } U\text{)}.$$

Propriété 2

Pour qu'une forme différentielle de classe C^1, $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j \in \Omega^1(U)$, soit exacte sur U, il est nécessaire qu'elle soit fermée sur U. (5)

(5) Noter que cette condition n'est pas suffisante (voir exemple 1).

Si ω est exacte sur U, il existe $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $df = \omega$,

donc $\quad \forall j \in [\![1, n]\!], \; P_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \quad$ et $\quad \forall i \in [\![1, n]\!], \; \dfrac{\partial P_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Schwarz (cf. chapitre 9 théorème 9).

Définition 4

Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dit **étoilé** quand il existe $a \in U$ tel que :

$\forall u \in U$, le segment $[a, u]$ est inclus dans U. (6)

(6) Il s'agit d'un rappel. Cette notion a déjà été introduite dans le chapitre 9, définition 15. Une partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points.

Propriété 3

Théorème de Poincaré

Soit ω une forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert étoilé U.

Alors, ω est exacte si et seulement si ω est fermée. (7)

(7) La démonstration de ce résultat est non exigible.

Supposons que U soit étoilé par rapport à l'origine (on se ramène à ce cas par translation).

On définit alors $\quad \varphi : U \times [0, 1] \to \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \omega(tx) \cdot x = \sum_{j=1}^{n} x_j P_j(tx)$ (8)

(8) U étant étoilé, pour tout $x \in [0,1]$, on a $tx \in [0,x] \subset U$.

Elle est continue et, pour tout $t \in [0, 1]$, l'application partielle $U \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe C^1 avec $\quad \forall i \in [\![1, n]\!], \; \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t) = P_i(tx) + \sum_{j=1}^{n} tx_j \dfrac{\partial P_j}{\partial x_i}(tx)$.

Sachant que ω est fermée sur U, on peut écrire $\quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t) = P_i(tx) + \sum_{j=1}^{n} tx_j \dfrac{\partial P_i}{\partial x_j}(tx)$ et constater qu'il s'agit de la dérivée de $\quad t \mapsto tP_i(tx)$.

Introduisons alors l'application $\quad f : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^1 \varphi(x, t) dt$.

Le théorème de dérivation sous le signe somme (9) s'applique pour chaque fonction partielle $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ est continue sur } U \times [0, 1] \right)$ d'où :

(9) Cas où l'intervalle d'intégration est compact.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t) dt = \left[tP_i(tx) \right]_0^1 = P_i(x).$$

Ainsi, ω est exacte, f est une primitive de ω sur U.

Exemple 1 Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et ω la forme différentielle définie sur U par :

$$\omega(x,y) = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

a) Vérifier que ω est de classe C^1 et fermée sur U.

b) On suppose que ω est exacte sur U. Il existe donc $F \in C^2(U,\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(x,y) \in U$, $\quad \omega(x,y) = dF_{(x,y)}$

Étant donné $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\varphi : V \to U$, $\quad (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$,

on pose $\quad G = F \circ \varphi, \quad G : (r,\theta) \mapsto F(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Calculer dG et en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\quad \forall (r,\theta) \in V, \quad G(r,\theta) = \theta + \lambda$.

c) Relever une contradiction dans les résultats précédents et conclure.

a) Vérifications immédiates : $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

b)
$$\begin{aligned} dG_{(r,\theta)} &= dF_{(r\cos\theta, r\sin\theta)} \circ d\varphi_{(r,\theta)} \\ &= \omega(r\cos\theta, r\sin\theta) \circ d\varphi_{(r,\theta)} \\ &= \frac{1}{r^2} r\cos\theta\big(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta\big) - r\sin\theta\big(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\big) \\ &= d\theta \end{aligned}$$

Donc $\quad G(r,\theta) = \theta + \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$. ✎(10)

✎(10) Car V est convexe puisque c'est un demi-plan de $\mathbb{R}^2$ (cf. chapitre 9, théorème 11, corollaire 2).

c) L'égalité $\quad F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \theta + \lambda$, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, est absurde car, pour r fixé, elle donne l'égalité d'une fonction 2π-périodique avec une fonction non périodique.

En conclusion, ω n'est pas exacte sur U. On constate que le théorème de Poincaré ne s'applique pas ici, car l'ouvert U n'est pas étoilé.

Exemple 2 a) Montrer que $\quad U = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \quad$ où $\quad \Delta = \{(x,0)/x \leqslant 0\} \quad$ est un ouvert étoilé.

b) Montrer que la forme différentielle ω définie sur U par $\ \omega(x,y) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ admet pour primitive sur $U \quad f : (x,y) \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$.

a) On vérifie que U est étoilé par rapport à tout point $A = (a,0)$ où $a > 0$.

b) Pour tout $(x,y) \in U \quad$ on a $\quad x + \sqrt{x^2+y^2} > 0 \quad$ et on obtient sans difficulté :

$$\forall (x,y) \in U, \quad df_{(x,y)} = \omega(x,y)$$

Noter que l'on a $\quad \tan\big(f(x,y)\big) = \dfrac{y}{x}$.

Exemple 3 Soit ω une forme différentielle de classe C^1 sur U.

On dit que l'application $\varphi \ : \ U \to \mathbb{R}$ est un **facteur intégrant** de ω si la forme différentielle $\varphi\omega$ est exacte sur U.

Exemple : $U = (\mathbb{R}_+^*)^3$, montrer que $\quad \omega \ : \ (x,y,z) \mapsto \dfrac{y+z}{x}dx + \dfrac{z+x}{y}dy + \dfrac{x+y}{z}dz$ admet un facteur intégrant de la forme $\quad (x,y,z) \mapsto \varphi(xyz) \quad$ où $\quad \varphi \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

Comme U est convexe, il suffit de choisir φ telle que la forme différentielle $\varphi\omega$ soit fermée.

Notons $\quad \varphi\omega = Pdx + Qdy + Rdz$; $\varphi\omega$ est fermée si :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (1), \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad (2), \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3).$$

On a : $\left\{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{x}\varphi(xyz) + z(y+z)\varphi'(xyz) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{y}\varphi(xyz) + z(z+x)\varphi'(xyz) \end{aligned}\right.$

L'égalité (1) donne $\dfrac{(y-x)}{xy}[\varphi(xyz) + xyz\,\varphi'(xyz)] = 0.$

Par raison de symétrie, pour que (1), (2), (3) soient vérifiées, il suffit que :

$$\forall t > 0, \varphi(t) + t\,\varphi'(t) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

Ainsi $\omega_1 = \dfrac{y+z}{x^2yz}dx + \dfrac{z+x}{xy^2z}dy + \dfrac{x+y}{xyz^2}dz$ est exacte.

Soit alors $f : U \to \mathbb{R}$ une primitive de ω_1 sur U, puisque U est un pavé donc convexe, les conditions :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y+z}{x^2yz} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z+x}{xy^2z} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x+y}{xyz^2}$$

sont successivement équivalentes à :

$$f(x, y, z) = -\frac{y+z}{xyz} + \lambda(y, z) \quad , \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{1}{y^2z} \quad , \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{1}{yz^2}$$

$$f(x, y, z) = -\frac{y+z}{xyz} + \lambda(y, z) \quad , \quad \lambda(y, z) = -\frac{1}{yz} + K \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Les primitives de ω_1 sur U sont donc de la forme $(x, y, z) \mapsto -\dfrac{x+y+z}{xyz} + K.$

B. Intégrale curviligne

Définition 5

Soit ω une forme différentielle continue sur U ouvert de E et $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc compact continu et de classe C^1 par morceaux dont le support Γ est inclus dans U.

On appelle **intégrale curviligne de ω le long de γ** le réel :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\varphi(t)) \cdot [\varphi'(t)]dt$$

Remarques

1) L'application $[a, b] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \omega(\varphi(t)) \cdot [\varphi'(t)]$ est continue par morceaux.

2) Dans le cas $n = 2$, $\omega = Pdx + Qdy \in \Omega^0(U)$ et $\varphi : [a, b] \to U$, $t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$.

On a $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[x'(t)P(x(t), y(t)) + y'(t)Q(x(t), y(t))\right] dt$ (11)

(11) En première année, nous avons introduit la notion de champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
Ainsi dans les cas $n=2$ ou $n=3$, en associant à la forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ ou $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ le champ de vecteurs $V = Pe_1 + Qe_2$ ou $V = Pe_1 + Qe_2 + Re_3$, on constate que l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ n'est autre que la circulation le long de γ du champ de vecteurs V.

Propriété 4

Relation de Chasles

Avec les notations précédentes et, pour $c \in]a, b[$, introduisons les arcs compacts continus et de classe C^1 par morceaux : $\gamma_{a,c} = ([a, c], \varphi)$, $\gamma_{c,b} = ([c, b], \varphi)$, $\gamma = \gamma_{a,b}$ (12)

Alors $\displaystyle\int_{\gamma_{a,b}} \omega = \int_{\gamma_{a,c}} \omega + \int_{\gamma_{c,b}} \omega.$

(12) Cette formule se généralise à un nombre fini de points de $]a, b[$.
Elle permet le calcul de $\int_\gamma \omega$ lorsque γ a des points anguleux.

Propriété 5

Changement de paramétrisation

Ajoutons aux données précédentes celle d'un autre arc paramétré $\gamma' = ([c, d], \varphi \circ \theta)$, où θ est un C^1-difféomorphisme de $[c, d]$ sur $[a, b]$. (13)

Alors $\displaystyle\int_{\gamma'} \omega = \varepsilon \int_\gamma \omega$ avec $\begin{cases} \varepsilon = 1 & \text{si } \theta \text{ est croissant} \\ \varepsilon = -1 & \text{si } \theta \text{ est décroissant} \end{cases}$

(13) On constate que γ' est compact continu, de classe C^1 par morceaux et de même support Γ que γ, il est inclus dans U.

☞ Plaçons-nous dans le cas particulier où γ est de classe C^1, le cas général s'en déduit à l'aide de la relation de Chasles.

Le changement de variable $t = \theta(u)$ donne :

$$\int_a^b \omega\big(\varphi(t)\big)\cdot[\varphi'(t)]\mathrm{d}t = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \omega\big(\varphi\circ\theta(u)\big)\cdot\big[\varphi'\big(\theta(u)\big)\big]\,\theta'(u)\mathrm{d}u$$

d'où $\displaystyle\int_\gamma \omega = \varepsilon\int_c^d \omega\big(\varphi\circ\theta(u)\big)\cdot\big[(\varphi\circ\theta)'(u)\big]\,\mathrm{d}u = \varepsilon\int_{\gamma'}\omega.$

Remarque

Soit Γ^+ l'arc orienté défini par le choix d'un représentant γ, la propriété 5 montre que deux représentants de Γ^+ donnent la même intégrale curviligne ; celle-ci sera notée $\displaystyle\int_{\Gamma^+}\omega$.

Si Γ^- désigne l'arc déduit de Γ^+ par changement d'orientation, on a :

$$\int_{\Gamma^-}\omega = -\int_{\Gamma^+}\omega.$$

L'intégrale curviligne de ω le long d'une courbe Γ dont l'orientation n'est pas précisée, n'est définie qu'à un signe près.

Propriété 6

Si Γ est une courbe fermée orientée, l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ ne dépend pas de l'origine choisie sur Γ.

Propriété 7

Pour U et Γ donnés, l'application $\omega \mapsto \displaystyle\int_\Gamma \omega$ est une forme linéaire sur $\Omega^0(U)$.

Théorème 1

Soit ω une forme différentielle exacte sur U, f une primitive de ω.

Pour toute courbe orientée Γ d'origine A, d'extrémité B incluse dans U, on a :

$$\int_\Gamma \omega = f(B) - f(A)$$ ✎[14]

✎[14] Noter que le résultat ne dépend que des points A et B.

☞ Soit $\gamma = ([a,b],\varphi)$ un représentant de Γ, $A = \varphi(a)$, $B = \varphi(b)$.

Plaçons-nous dans le cas où γ est de classe C^1, le cas général s'en déduit à l'aide de la relation de Chasles.

De $\omega = df$, on tire $\omega\big(\varphi(t)\big)\cdot[\varphi'(t)] = df_{\varphi(t)}[\varphi'(t)] = (f\circ\varphi)'(t)$

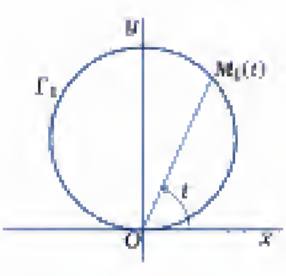
d'où $\displaystyle\int_\Gamma\omega = \int_a^b (f\circ\varphi)'(t)\mathrm{d}t = f\circ\varphi(b) - f\circ\varphi(a) = f(B) - f(A).$

Exemple 4 Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ lorsque Γ est l'une des courbes suivantes :

a) $x^2 + y^2 - ay = 0$

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $\qquad a > 0, b > 0$

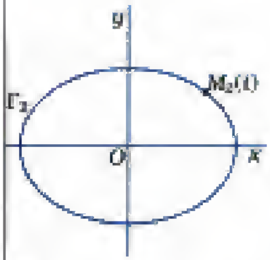
c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2x}{a} - \dfrac{2y}{b} = 0$



a) Paramétrisation de Γ_1 : $x^2 + y^2 - ay = 0$.

$[0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto M_1(t)$, $x = a\cos t\sin t$, $y = a\sin^2 t$

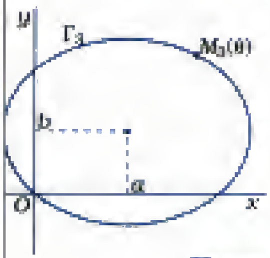
$$\int_{\Gamma_1} y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \frac{a^3}{4}\int_0^\pi \left[(1-\cos 2t)^2\cos 2t + \sin^3 2t\right]\mathrm{d}t = -\frac{\pi a^3}{4}.$$



b) Paramétrisation de $\Gamma_2 \ : \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

$[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto M_2(t), \quad x = a\cos t, \quad y = b\sin t$

$$\int_{\Gamma_2} y^2 \mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \left[-ab^2 \sin^3 t + a^2 b \cos^3 t\right] \mathrm{d}t = 0.$$



c) Paramétrisation de $\Gamma_3 \ : \ \dfrac{(x-a)^2}{a^2} + \dfrac{(y-b)^2}{b^2} - 2 = 0.$

$[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto M_3(\theta), \quad x = a(1 + \sqrt{2}\cos\theta), \quad y = b(1 + \sqrt{2}\sin\theta)$

$$\int_{\Gamma_3} y^2 \mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{+\pi} \Big[-ab^2\sqrt{2}\sin\theta(1 + \sqrt{2}\sin\theta)^2 + a^2 b\sqrt{2}\cos\theta(1 + \sqrt{2}\cos\theta)^2\Big] \mathrm{d}\theta$$

$$\int_{\Gamma_3} y^2 \mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y = 4\,\pi\, ab(a-b).$$

Exemple 5 Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ avec $\omega = \dfrac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, Γ étant le carré orienté de sommets consécutifs $A = (a, a)$, $B = (-a, a)$, $C = (-a, -a)$, $D = (a, -a)$, $(a > 0)$.

La forme différentielle ω est de classe C^∞ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Elle se décompose en $\quad \omega = \omega' + \omega'' \quad$ avec $\quad \omega' = \dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \quad , \quad \omega'' = \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$.

On constate que ω' est exacte sur U : $\quad \omega' = \dfrac{1}{2} d\, \ell n(x^2 + y^2)$

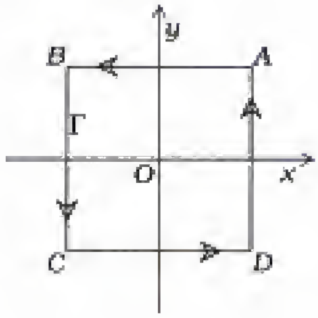
donc $\displaystyle\int_\Gamma \omega' = 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \omega'' \quad , \quad \omega''$ a été étudiée dans l'exemple **1**.

- Elle est exacte sur $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$

  $\omega'' = d \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x}$.

- Elle est exacte sur $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$

  $\omega'' = -d \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{y}$.



Écrivons $\quad \displaystyle\int_\Gamma \omega'' = \int_{AB} \omega'' + \int_{BC} \omega'' + \int_{CD} \omega'' + \int_{DA} \omega''$

On a $\quad \displaystyle\int_{AB} \omega'' = \Big[-\operatorname{Arctan} \frac{x}{a}\Big]_{x=a}^{x=-a} = \frac{\pi}{2} \quad$ et $\quad \displaystyle\int_{BC} \omega'' = \Big[\operatorname{Arctan}\Big(-\frac{y}{a}\Big)\Big]_{y=a}^{y=-a} = \frac{\pi}{2}$.

On trouve de même $\displaystyle\int_{CD} \omega'' = \int_{DA} \omega'' = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\quad \displaystyle\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \omega'' = 2\pi$.

On remarquera que ce calcul montre que ω n'est pas exacte sur U bien qu'étant fermée. ✎ [15]

$$\int_{BC} \omega'' = \int_{CD} \omega'' = \int_{DA} \omega'' = \frac{\pi}{2}.$$

✎ [15] Il n'existe donc aucun ouvert étoilé contenant Γ sur lequel ω soit de classe C^1.

Exemple 6 Calculer $\displaystyle\int_\Gamma z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z \quad$ où Γ est le cercle (supposé orienté) d'équations :

$$x + y + z = a \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

F étant continue sur $[a, b]$, H_1 est de classe C^1 sur $[a, b]$ avec :

$$\forall u \in [a, b], \quad H_1'(u) = F(u).$$

Pour la même raison, la fonction $K : (u, y) \mapsto \int_a^u f(x, y)\mathrm{d}x$ admet sur $[a, b] \times [c, d]$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial K}{\partial u} : (u, y) \mapsto f(u, y)$ qui est continue sur $[a, b] \times [c, d]$.

Par application du théorème de continuité sous le signe somme (cas où l'intervalle d'intégration est compact), pour $u \in [a, b]$ la fonction partielle $y \mapsto \int_a^u f(x, y)\mathrm{d}x$ est continue sur $[c, d]$. On déduit alors du théorème de dérivation sous le signe somme (cas où l'intervalle d'intégration est compact) que H_2 est de classe C^1 sur $[a, b]$ avec :

$$\forall u \in [a, b], H_2'(u) = \int_c^d \frac{\partial K}{\partial u}(u, y)\mathrm{d}y = \int_c^d f(u, y)\mathrm{d}y = F(u).$$

Il résulte de ceci qu'il existe une constante $\lambda \in E$ telle que :

$$\forall u \in [a, b], H_2(u) = H_1(u) + \lambda$$

et, comme $H_2(a) = H_1(a) = 0$, on a finalement $\lambda = 0$ et la formule annoncée.

Propriété 8

Si f se décompose en $f(x, y) = g(x)\,h(y)$, on a :

$$\iint_\Delta g(x)\,h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_c^d h(y)\mathrm{d}y\right].$$

2. Extension de la notion d'intégrale double – Aire plane

Définition 7

On appelle **compact élémentaire** une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ pouvant être définie simultanément par $\Delta : a \leqslant x \leqslant b, \quad u(x) \leqslant y \leqslant v(x)$ ou par $\Delta : c \leqslant y \leqslant d, \quad r(y) \leqslant x \leqslant s(y)$ où $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $r, s : [c, d] \to \mathbb{R}$ sont continues.

Définition 8

Avec les notations ci-dessus, si $f \in C(\Delta, \mathbb{K})$, on a :

$$\int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$ (19)

La valeur commune de ces intégrales est alors appelée **intégrale double** de f sur le compact Δ et notée $\iint_\Delta f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19) Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Ce résultat est admis, il est encore appelé théorème de Fubini.

Définition 9

L'aire d'un compact élémentaire Δ de $\mathbb{R}^2$ est l'intégrale double sur Δ de la fonction constante égale à 1 sur Δ. $\mathcal{A}(\Delta) = \iint_\Delta \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. Changement de variables

3.1 – Formule du changement de variables dans les intégrales doubles

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, D et Δ deux compacts simples tels que $D \subset U$, $\Delta \subset V$, $\varphi(D) = \Delta$. On suppose, de plus, que l'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents dans D est d'aire nulle. ✎[22]

✎[22] Une partie d'aire nulle est, par exemple, une partie formée d'un ensemble fini de points A_i ou d'arcs Γ_j continus admettant un paramétrage de la forme $([a_j, b_j], \Phi_j)$.

L'application $\varphi : D \to \Delta, (u, v) \mapsto (x, y)$ définit un changement de variables ;

le jacobien de φ, $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ induit une application continue de D dans $\mathbb{R}$.

Avec ces notations, pour $f \in \mathcal{C}(\Delta, \mathbb{K})$, on a la formule :

$$\iint_\Delta f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad ✎[23]$$

✎[23] Noter la présence de la valeur absolue du jacobien de φ.

3.2 – Applications

a) Coordonnées polaires

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Le jacobien de φ est $\dfrac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$

La formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iint_\Delta f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|r|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \quad ✎[24]$$

✎[24] Il est souvent judicieux de choisir D pour que r reste positif (quitte à faire un partage de Δ et utiliser la relation de Chasles).

c) Cas d'une application affine ✎[25]

✎[25] Cas particuliers
φ homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $\mathcal{A}[\varphi(D)] = |\lambda|^2 \mathcal{A}(D)$
φ affinité de rapport $\mu \in \mathbb{R}^*$: $\mathcal{A}[\varphi(D)] = |\mu| \mathcal{A}(D)$
φ isométrie de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{A}[\varphi(D)] = \mathcal{A}(D)$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{est une bijection affine.}$$

Le jacobien de φ est le réel $\det L(\varphi)$ où $L(\varphi)$ désigne la partie linéaire de φ.

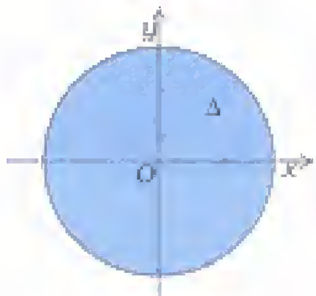
Si D est un compact simple, $\varphi(D)$ est un compact simple dont l'aire est :

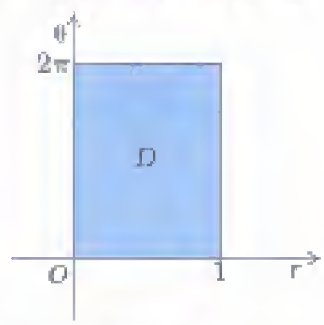
$$\mathcal{A}[\varphi(D)] = \mathcal{A}(D)\,|\det L(\varphi)|.$$

Exemple 9 Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où Δ est le disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Il est naturel d'utiliser les coordonnées polaires :

$\Delta : x^2 + y^2 \leqslant 1$ $\qquad\qquad$ $D : 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$





L'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents dans D est :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0\}, \quad \text{il est d'aire nulle.}$$

Le changement de variable donne :

$$I = \iint_D \frac{r}{1 + r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{r}{1 + r^2}\mathrm{d}r\right), \quad I = \pi \ln 2.$$

4. Formule de Green-Riemann – Calcul d'aires planes

Théorème 3

Soit Δ une partie de $\mathbb{R}^2$ bordée par un arc fermé, de classe C^1 par morceaux, sans point double, et soit $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ une forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert contenant Δ.

On a alors $\displaystyle\int_{\partial^+\Delta} \omega = \int_{\partial^+\Delta} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

où $\partial^+\Delta$ désigne la frontière de Δ parcourue dans le sens direct du plan.

Application au calcul d'aires planes

Soit D l'image de Δ en coordonnées polaires.

1) $\displaystyle\mathcal{A}(\Delta) = \iint_{\Delta} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$

2) $\displaystyle\mathcal{A}(\Delta) = \int_{\partial^+\Delta} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial^+\Delta} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial^+\Delta} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial^+D} r^2\mathrm{d}\theta.$

Exemple 10 **Aire d'une arche de cycloïde.** Δ est la partie du plan limitée par l'axe Ox et l'arc paramétré $\gamma\ :\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\quad t \mapsto (x, y) = \big(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\big)$

$$\mathcal{A}(\Delta) = -\int_{\partial^+\Delta} y\mathrm{d}x = a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^2\mathrm{d}t$$

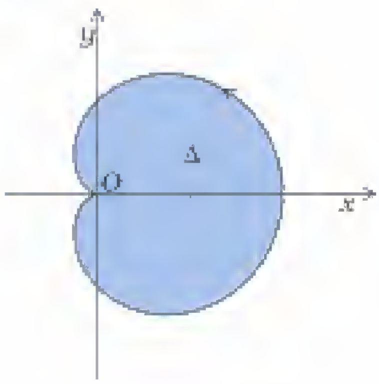
$$\mathcal{A}(\Delta) = 3\,\pi\,a^2$$

(noter que l'orientation de $\partial^+\Delta$ correspond à l'orientation de γ dans le sens des t décroissants).

Exemple 11 Aire limitée par la cardioïde d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$.

$$\mathcal{A}(\Delta) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+D} r^2\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = \frac{3\,\pi\,a^2}{2}.$$



D. Intégrale triple – Calcul de volumes

✎[26] Cette section présente brièvement des outils mathématiques utiles en sciences physiques.

1. Brève extension ✎[26]

On considère une fonction réelle ou complexe f continue sur Δ, partie de $\mathbb{R}^3$, de l'un des types précisés dans la définition qui suit.

Définition 10

L'**intégrale triple** sur Δ de f notée $\int_\Delta f = \iiint_\Delta f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ est définie par :

a) Cas où Δ est un pavé : $\Delta = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$

$$\iiint_\Delta f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^{a'} \left[\int_b^{b'} \left(\int_c^{c'} f(x, y, z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

b) Cas où $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, u(x, y) \leq z \leq v(x, y),\ (x, y) \in D\}$, avec D compact simple de $\mathbb{R}^2$, u et v : $D \to \mathbb{R}$ continues.

$$\iiint_\Delta f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

c) Cas où $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y) \in D(z),\ a \leq z \leq b\}$, avec, pour tout $z \in [a, b]$, $D(z)$ compact simple de $\mathbb{R}^2$.

$$\iint_\Delta f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left[\iint_{D(z)} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z.$$

Définition 11

Le volume de Δ, noté $\mathcal{V}(\Delta)$, se calcule en choisissant $f = 1$

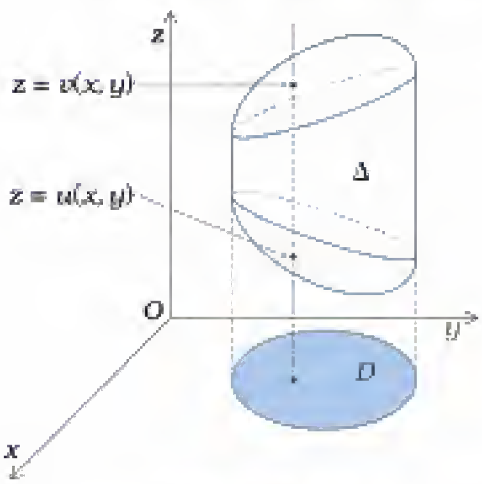
$$\mathcal{V}(\Delta) = \iiint_\Delta \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Remarques

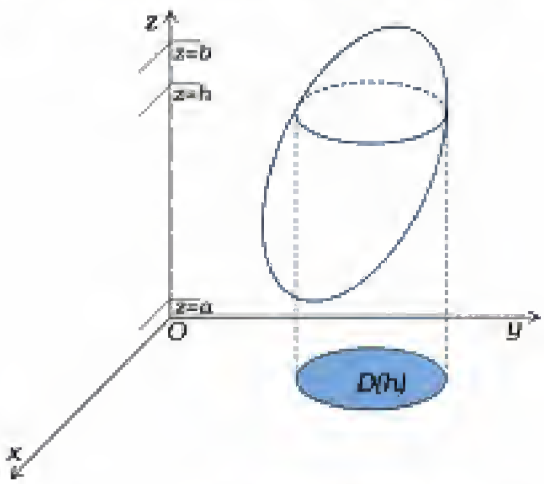
1) Dans a), on peut permuter l'ordre des intégrations et, si $f(x, y, z) = \alpha(x)\,\beta(y)\,\gamma(z)$, on a :

$$\iiint_\Delta \alpha(x)\,\beta(y)\,\gamma(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left[\int_a^{a'} \alpha(x)\mathrm{d}x \right] \left[\int_b^{b'} \beta(y)\mathrm{d}y \right] \left[\int_c^{c'} \gamma(z)\mathrm{d}z \right].$$

2) Le cas b) est appelé **sommation par piles**. Le cas c) est appelé **sommation par tranches**.



Sommation par piles



Sommation par tranches

Convention

Les parties de $\mathbb{R}^3$ sur lesquelles on définit une intégrale triple sont appelées les **compacts cubables** de $\mathbb{R}^3$.

Propriétés

On retrouve les mêmes propriétés que pour l'intégrale double :

- linéarité par rapport à la fonction intégrée (voir propriété **10**) ;
- positivité, croissance (voir propriété **11**) ;
- additivité par rapport au compact d'intégration (voir propriété **12**).

Exemple 12 Calculer $I = \iiint_\Delta (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où $\Delta\ :\ x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$.

Utilisons une sommation par piles avec $D : x^2+y^2 \leqslant a^2$.

$$I = \iint_D 2(x^2+y^2)\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D'} r^2\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

à l'aide des coordonnées polaires, $D' : 0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, on obtient $I = \dfrac{8\pi}{15}a^5$

(moment d'inertie d'une boule par rapport à un de ses diamètres).

Exemple 13 Calculer $I = \iiint_\Delta z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où $\Delta\ :\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant 1$.

Utilisons une sommation par tranches avec $D(z)\ :\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant 1-\sqrt{z}$.

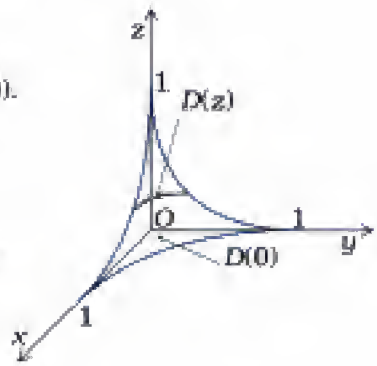
Notons que $D(z)$ se déduit de $D(0)$ par l'homothétie de centre $(0,0)$, ,

de rapport $(1-\sqrt{z})^2$ autrement dit :

$$\iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D(0)} (1-\sqrt{z})^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (1-\sqrt{z})^4\ \mathcal{A}(D(0)).$$

On a $\mathcal{A}(D(0)) = \displaystyle\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$ d'où :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 z\left[\iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 t^3(1-t)^4\mathrm{d}t = \frac{1}{840}. \end{aligned}$$



2. Changement de variables

2.1 – Formule du changement de variables dans les intégrales triples

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^3$, $\varphi\ :\ U \to V$ une application de classe C^1, D et Δ deux compacts cubables tels que $D \subset U,\ \ \Delta \subset V,\ \ \varphi(D) = \Delta$.

L'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents dans D est supposé de volume nul.

L'application $\varphi : D \to \Delta, (u,v,w) \mapsto (x,y,z)$ définit un changement de variables ;

le jacobien de φ, $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ induit une application continue de D dans $\mathbb{R}$.

Avec ces notations, pour $f \in \mathscr{C}(\Delta, \mathbb{K})$, on a la formule : ✎ (27)

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

✎ (27) Il faut noter la présence de la valeur absolue du jacobien de φ.

2.2 – Applications

a) Coordonnées cylindriques $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \mapsto (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.

Le jacobien de φ est $\dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = r$. La formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_\Delta f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

b) Coordonnées sphériques

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Le jacobien de φ est : $\dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi.$

La formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_\Delta f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)r^2\,|\cos\varphi|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

✎ (28) Cas particuliers
φ homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$:
$\mathcal{V}[\varphi(D)] = |\lambda|^3\mathcal{V}(D)$
φ isométrie de $\mathbb{R}^3$:
$\mathcal{V}[\varphi(D)] = \mathcal{V}(D)$

d) Cas d'une application affine ✎ (28) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bijection affine.

Le jacobien de φ est $\det L(\varphi)$, où $L(\varphi)$ désigne la partie linéaire de φ, il est constant.
Si D est un compact cubable, $\varphi(D)$ l'est aussi, son volume est $\mathcal{V}[\varphi(D)] = \mathcal{V}(D)\,|\det L(\varphi)|$.

Exemple 14 Calculer $I = \displaystyle\iiint_\Delta z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où Δ : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

Utilisons le changement de variables linéaire défini par : $x = aX$, $y = bY$, $z = cZ$

$$D : X^2 + Y^2 + Z^2 \leqslant 1, \qquad I = \iiint_D abc^3 Z^2\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z.$$

Puis on introduit les coordonnées sphériques : $D_1 : 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

$$I = \iiint_{D_1} abc^3 r^4\sin^2\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi = \frac{4\,\pi\,abc^3}{15}.$$

Exemple 15 Calculer $I = \displaystyle\iiint_\Delta x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où $(p, q, r, s) \in \mathbb{N}^4$ et $\Delta : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z \leqslant 1$.

Utilisons le changement de variables défini par $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$

L'image de Δ est $D = [0, 1]^3$, le jacobien est $\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = u^2 v$.

$$I = \iiint_D u^{p+q+r+2}v^{q+r+1}w^r(1-u)^s(1-v)^p(1-w)^q\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

$$I = \int_0^1 u^{p+q+r+2}(1-u)^s\mathrm{d}u \int_0^1 v^{q+r+1}(1-v)^p\mathrm{d}v \int_0^1 w^r(1-w)^q\,\mathrm{d}w.$$

Le calcul donne $\displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^m\mathrm{d}t = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$ d'où $I = \dfrac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)!}$.

<u>**Remarque**</u> On en déduit le volume du tétraèdre Δ, $(p = q = r = s = 0)$: $\mathcal{V}(\Delta) = \dfrac{1}{6}$.

Exemple 16 Pour calculer le Volume de la partie du cylindre $x^2 + y^2 - ax \leqslant 0$ intérieure à la sphère de centre O et de rayon a, utilisons les coordonnées cylindriques. L'image réciproque de Δ est :

$$D : -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant a\cos\theta, \quad |z| \leqslant \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$\mathcal{V}(\Delta) = \iiint_D r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{a\cos\theta} 2r\sqrt{a^2 - r^2}\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta$$

$$\mathcal{V}(\Delta) = \frac{2a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \left|\sin^3\theta\right|\right)\mathrm{d}\theta \qquad \mathcal{V}(\Delta) = \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Index

Q – R

S

T

U – V – W

Titres disponibles en deuxième année dans la filière PSI…

En Mathématiques
- Analyse PSI
- Algèbre et géométrie PSI

En Physique
- Optique MP-PC-PSI-PT
- Électromagnétisme PC-PSI
- Physique des ondes PC-PSI
- Thermodynamique PC-PSI
- Mécanique des fluides PC-PSI
- Électrotechnique PSI
- Électronique PSI

En Chimie
- Chimie PSI

Livres d'exercices
- Mathématiques PC-PSI
- Physique PSI

LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

→ **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.

→ **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.

→ **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont **la collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 208.0338
ISBN : 2 7495 0394 9
www.editions-breal.fr
9 782749 503943